2025.09.09 第一次习题课. 引入与高中-本科衔接.

1. 微积分研究什么?

求上面的连续函数 and 可积函数.

为什么研究函数? 很多问题本质上寻找一个映射 f.

2. 数系扩充

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

3. 无限与有限. (高等数学最大差别即引入无限).

① 不交换: Riemann 重排

② 不封闭. $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \notin \mathbb{Q}$.

③ $B \subseteq A$. 但 $|A| = |B|$. 如 $|\mathbb{Z}| = |2\mathbb{Z}|$

4. 这门课关心什么?

N-L公式、Taylor公式、Fourier展开 ----.

(良好函数可以表示为基本初等函数)

学会用已知的近似未知的.

微分、Taylor、等价无穷小、阿基米德近似、折线近似、

C^∞近似 ----.

$|\sin x| \le |x|$.

5. 衔接知识: Bernoulli, 均值、Cauchy、三角估计

举例 $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} > (1+\frac{1}{n})^n$

和差化积、积化和差 ($\sum \cos kx$).

5. 证明技巧.

① 化归. $||x|-|y|| \le |x-y|$.

② 反证: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

(思考: $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow n = m^2,\ m \in \mathbb{N}$).

③ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 非构造性证明.

④ 归纳: n元均值.

⑤ $a = b \Leftrightarrow a \ge b,\ a \le b$.

$0.\dot{9} = 1$ 吗?