2025.11.18. Taylor 公式

1. Taylor 公式的证明.

$f(x)$ 在 x_0 某邻域内定义，在 x_0 处有 n 阶导数. 则 $f(x)$ 在 x_0 附近有如下展开.

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \quad (x \to x_0)$$

证明：记 $T_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} \overset{n-1\text{次 L'H}}{=\!=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{n!} \cdot \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = 0 \qquad \square.$$

思考：为什么不直接用 n 次 L'Hospital 法则？

即 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(x)}{n!}$

$$= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right) = 0.$$

因为 $T_n^{(n-1)}(x)$ 形式上是 $f^{(n)}(x)$. 但条件中仅有 $f^{(n)}(x_0)$ 存在.

而不知道 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 一个邻域中存在.

2. ~~L'Hospital 法则~~ 中值定理 的说明.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

在 $[0, x]$ 上用中值定理. 某个.

$$x^2\sin\frac{1}{x} = x\cdot\left(2\xi\sin\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi}\right). \quad \xi \in [0, x]$$

i.e. $\exists \xi \in [0, x]$. s.t. $x\sin\frac{1}{x} = 2\xi\sin\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi}$.

令 $x \to 0$. 有 LHS $= 0$, $\lim\limits_{\xi\to 0} 2\xi\sin\frac{1}{\xi} = 0$

这是否说明 $\lim\limits_{\xi\to 0}\cos\frac{1}{\xi} = 0$?

解答：不能。事实上 $\lim_{\xi\to 0}\cos\frac{1}{\xi}$ 不存在。

虽然 $\forall x>0.\ \exists \xi\in[0,x]$ s.t. $x\sin\frac{1}{x}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}$.

以及 $x\to 0$ 会导致 $\xi\to 0$.

故的确有 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} 2\xi\sin\frac{1}{\xi} - \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{\xi}$$

$\lim_{x\to 0} 2\xi\sin\frac{1}{\xi} = 0$

$$= -\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{\xi}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{\xi}=0.$$

但这不等同于 $\lim_{\xi\to 0}\cos\frac{1}{\xi}=0$. ☆

因为只知道 $\xi\in[0,x]$. 但不知道具体取何值.

即 $x\to 0$ 推出 $\xi\to 0$. 却不能保证 $x\to 0$ 时，

ξ 遍历 0 的某个右邻域.

ξ 可能取那些特殊的值，使得 $\cos\frac{1}{\xi}\to 0$.

3. 关于经典例子 $e^{-\frac{1}{x^2}}$. 和 Taylor 多项式唯一性.

考虑 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 其 Taylor 公式为

$$f(x) = 0 + o(x^n).$$

书上证法：归纳地证明 $f^{(n)}(x)=0.\ \forall n\in\mathbb{N}.$

我们给出另一个证明.

[Taylor公式的唯一性]

$f(x)$ 在 x_0 附近定义，$f^{(n)}(x_0)$ 存在，假设有以下多项式展开

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + \cdots A_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n). \quad (x \to x_0)$$

则 $A_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$. $k = 0, 1, \cdots, n$.

因此，只需说明 $e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n)$. $x \to 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

亲就证明了 $f^{(n)}(0) = 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

即证 $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} x^{-n} = 0$.

~~撤~~ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x^n}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$

换元 $y = \frac{1}{x^2} \to +\infty$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{y^{\frac{n}{2}}}{e^y} = 0$

这是显然的 □.

4. 用 l'Hospital 法则和 Taylor 公式求极限.

Rmk. Taylor 公式本质上即多重 l'Hospital 法则. 因此，理论上 l'Hospital 能做，Taylor 都能做. 请大家熟悉 Taylor.

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin x - x\cos x}$

Step1. 全写成 Taylor 多项式.

Step2. 做多项式极限.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{3}{2}.$$

Rmk1. 为什么展开至 x^3 项？因为到这一项，分子、分母系数已非 0.

Rmk2. Taylor 公式将一切极限求解实现为"数次数". $\frac{0}{0}$ 型

② $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ 注意到导数形式！

令 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$. 这极限为 $f'(0)$.

而 $f'(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\right)$.

故原式 $=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

洛
$=e\cdot\lim_{x\to 0}\dfrac{1-1-\ln(1+x)}{2x(1+x)+x^2}$

总之也不要应洛尽洛.
尽量也考虑一下等价无穷小等技巧!

$=e\cdot\lim_{x\to 0}-\dfrac{\ln(1+x)}{x\cdot(3x+2)}=-e\cdot\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{3x+2}=-\dfrac{e}{2}$.

③ $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1+x^a}{1+x^b}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ $(a,b>0)$.

取对数是 $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(\frac{1+x^a}{1+x^b}\right)}{\ln x}$

$1+x^a/1+x^b=\dfrac{x^a-x^b}{1+x^b}+1$

等价无穷小

$=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x^a-x^b}{1+x^b}}{\ln x}$

$=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^a-x^b}{(1+x^b)\ln x}$

上面 $O(x^{\min\{a,b\}})\sim 0$.

下面 $O(\ln x)\sim-\infty$

$=0$. 原极限 $=1$.

④ $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}$ 分析：分母 $=O(x^4)$. 因此分子展开至 x^4.

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)}{8x^4}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{8x^4}=-\dfrac{1}{16}$.

⑤ $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)\dfrac{1}{\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\left(x-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

分母 $O(x^3)$. 因此分子展开至 x^3.

⑥ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln(x\sin\frac{1}{x})$

分析. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$. 因此对 $\ln(x\sin\frac{1}{x})$ 在 1 处展开.

Taylor 展开.

$$x\sin\frac{1}{x} = x\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o(x^{-3})\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{6x^2} + o(x^{-2}).$$

为什么仅展开至 $\frac{1}{x^2}$ 项? 因为外面乘的 x^2.

$$= \lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

等价无穷小

$$= \lim_{x\to\infty} x^2\left(-\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{6} + o(1)\right) = -\frac{1}{6}$$

⑦ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

Rmk. 一般形式. 如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

则 $\lim\limits_{x\to a}\left(1 + f(x) + o(f(x))\right)^{\frac{1}{f(x)}} = e$.

因为取对数后是 $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}\ln(1 + f(x) + o(f(x)))$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x) + o(f(x))}{f(x)} = 1 \quad \square.$$

⑧ 往年题 (2024)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\sqrt{|x|} - 2 + |x|}{x^2}$$

令 $y = \sqrt{|x|} \to 0^+$.

$$= \lim_{y\to 0^+}\frac{2(\cos y - 1) + y^2}{y^4}$$

分母 $O(y^4)$ 故分子展开至 y^4.

$$= \lim_{y\to 0^+}\frac{2\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4) - 1\right) + y^2}{y^4} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{y^4}{12} + o(y^4)}{y^4} = \frac{1}{12}.$$

⑦. 往年题 (2021). → 分子 ~ x^4. 故分母展开至 x^4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)^4}{\sqrt{1-\frac{x\sin x}{2}}-\sqrt{\cos x}}$$

~~$\frac{x\sin x}{2}$~~

$(x\to 0)$

$$1-\frac{x\sin x}{2} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+o(x^4).$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4).$$

$$\sqrt{1+y} = 1+\frac{y}{2}-\frac{1}{8}y^2+o(y^2).$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{x\sin x}{2}} = \sqrt{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+o(x^4)}$$

$$= 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+o(x^4)\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)$$

$$= 1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{32}+o(x^4)$$

$$= 1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{96}+o(x^4).$$

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}$$

$$= 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4).$$

$$= 1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o(x^4).$$

因此, 原式 $= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{96}-\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}\right)+o(x^4)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4/48+o(x^4)} = 48.$$

5. Taylor公式计算 (依靠唯一性定理).

① 加减法

$\ln(1+x+x^2+x^3)$. (x^6).

$= \ln\frac{1-x^4}{1-x} = \ln(1-x^4) - \ln(1-x)$

$= (-x^4+o(x^6)) - (-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+o(x^6))$

$= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4}x^4+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+o(x^6)$.

② 乘除法.

(1). $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ (x^4)

$= (1+x+x^2)\cdot\frac{1+x}{1+x^3} = (1+2x+2x^2+x^3)\cdot\frac{1}{1+x^3}$

$= (1+2x+2x^2+x^3)(1-x^3+o(x^4))$

$= 1+2x+2x^2+x^3-x^3-2x^4+o(x^4) = 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$.

(2) $\frac{x}{\sin x}$ (x^4). (待定多项式). 调换(2)(3)位置

设 $\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots} = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+o(x^4)$.

则有 $x = (a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+o(x^4))(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^4))$

(对比系数) 常一次项: $1=a$

$\sin x$ 的 $\frac{x^4}{120}$

$\rightsquigarrow$ 两边消去x: $1 = (1+bx+cx^2+dx^3+ex^4+o(x^4))(1-\frac{x^2}{6}+o(x^4))$

一次项: $0=b \Rightarrow 1=(1+cx^2+dx^3+ex^4+o(x^4))(1-\frac{x^2}{6}+o(x^4))$

$\frac{x^4}{120}$

二次项: $0 = c-\frac{1}{6} \Rightarrow c=\frac{1}{6}$.

三次项: $0=d$

四次项: $0 = e-\frac{c}{6}+\frac{1}{120} = e-\frac{1}{36}+\frac{1}{120} = e-\frac{7}{360} \Rightarrow e=\frac{7}{360}$.

$\Rightarrow \frac{x}{\sin x} = 1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+o(x^4)$.

(3) $\frac{X}{2X^2+X-1}$. (X^3)

$\Rightarrow X = (2X^2+X-1)(a+bx+cx^2+dx^3+o(X^3))$

对比系数: X^0 $0 = -a \Rightarrow a = 0$

X^1 $1 = -b+a = -b \Rightarrow b = -1$

X^2 $2 = -c+b+2a = -c-1+0 \Rightarrow c = -3$

X^3 $0 = 2b+c-d = -2-3-d \Rightarrow d = -5$.

$\Rightarrow \frac{X}{2X^2+X-1} = -X-3X^2-5X^3+o(X^3)$.

③ 复合.

(1) $\cos X^2$.

$= 1-\frac{X^4}{2}+\frac{X^8}{24}+\cdots = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k X^{2k}}{(2k)!}+o(X^{2n+1})$.

(2) $\ln(\cos X+\sin X)$. (X^4).

$\cos X+\sin X = 1+X-\frac{X^2}{2}-\frac{X^3}{6}+\frac{X^4}{24}+o(X^4)$.

$\Rightarrow \ln(\cos X+\sin X)$

$= \ln(1+(X-\frac{X^2}{2}-\frac{X^3}{6}+\frac{X^4}{24}+o(X^4)))$

$= (X-\frac{X^2}{2}-\frac{X^3}{6}+\frac{X^4}{24})$

$-\frac{1}{2}(X-\frac{X^2}{2}-\frac{X^3}{6})^2$

$+\frac{1}{3}(X-\frac{X^2}{2})^3 - \frac{1}{4}X^4 + o(X^4)$

$= (X-\frac{X^2}{2}-\frac{X^3}{6}+\frac{X^4}{24})-\frac{1}{2}(X^2-X^3+\frac{7}{12}X^4+o(X^4))$.

$+\frac{1}{3}(X^3-\frac{3}{2}X^4+o(X^4))-\frac{1}{4}X^4+o(X^4)$

$= X-X^2+\frac{2}{3}X^3-\frac{5}{12}X^4+o(X^4)$.

④. 微分、积分.

求 $\arctan^{(n)}(0)$.

Recall: 我们曾用隐函数求过.
现在用Taylor多项式给出另一种求法.

注意到 $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = (\arctan x)^{(n+1)}$

故 $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}(0) = \arctan^{(n+1)}(0)$.

~~故若能~~

但 $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^k x^{2k} + o(x^{2k+1})$.
$|x|<1$

故设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

有 $\begin{cases} f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cdot (2n)! \\ f^{(2n+1)}(0) = 0. \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

这里 $n \geq 1$. $n=0$ 时, 也 $=0$.

那么. $\begin{cases} \arctan^{(2n)}(0) = f^{(2n-1)}(0) = 0. \\ \arctan^{(2n+1)}(0) = f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cdot (2n)! \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

练习. 求 $\arcsin^{(n)}(0)$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= 1 + (-\frac{1}{2})(-x^2) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\times 1}(-x^2)^2 + \cdots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(-x^2)^n + o(x^{2n+1})$

因此 $\begin{cases} (\arcsin x)^{(2n)}(0) = 0. & n \in \mathbb{N} \\ (\arcsin x)^{(2n+1)}(0) = (2n)! \cdot \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!} \cdot (-1)^n \\ \qquad = (2n)! \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \qquad (\text{用 } (2n)! = (2n)!!\,(2n-1)!! \text{ 和 } (2n)!! = 2^n \cdot n!) \\ \qquad = ((2n-1)!!)^2. \quad n \in \mathbb{N} \\ (\arcsin x)'(0) = 1. \end{cases}$

$\Rightarrow \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots$

(补) 反函数视作复合

展开 $\arcsin x$ 到 x^3.　　设 $\arcsin x = ax+bx^2+cx^3+o(x^3)$　　因为 $\arcsin x \sim x$. 故没常数项且首项为 x ✓

$x = \sin(\arcsin x)$

$= (x+bx^2+cx^3+o(x^3)) - \frac{1}{6}(x+bx^2+cx^3+o(x^3))^3 + o(x^3)$.

对比系数：　$x \cdot 1 = 1$ ✓

$x^2 \cdot \quad 0 = b$

$x^3 \cdot \quad 0 = c - \frac{1}{6} \Rightarrow c = \frac{1}{6}$.

$\rightsquigarrow \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

6. Schwarz 公式 / 中心差分格式

f 在 a 处二阶可导. 则 $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a)$

证明: $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + O(h^3)$

$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + O(h^3)$.

$\Rightarrow LHS = \lim_{h\to 0} \frac{f''(a)h^2 + o(h^2)}{h^2} = f''(a)$　□.

Rmk. 假设 f 充分光滑.

则 $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3 + O(h^4)$

$f(a+h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{6}h^3 + O(h^4)$

$\Rightarrow \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a) + O(h^2)$. 中心差分近似 $f''(a)$.

$\begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a) + O(h^2). \\ \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + O(h) \end{cases}$

中心差分近似 $f'(a)$ 精度高于偏心差分.

7. f 在 $\mathbb{R}$ 上三阶可导. $|f| \le M_0$, $|f'| \le M_2$

证明 $|f'(x)| \le \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$. $\forall h > 0$. 从而 $|f'| \le \sqrt{2M_0M_2}$.

证明: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$ (Lagrange 余项).

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\eta)}{2}h^2.$$

$$\Rightarrow f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{1}{2}(f''(\xi) - f''(\eta))h^2.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + \frac{h}{4}(f''(\eta) - f''(\xi)).$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \le \frac{2M_0}{2h} + \frac{h}{4} \cdot 2M_2 = \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2. \quad \forall h > 0.$$

又 $\frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2 \ge \sqrt{2M_0M_2}$ 当且仅当 $\frac{M_0}{h} = \frac{h}{2}M_2$

即 $h = \sqrt{2M_0/M_2}$ 时取等号.

故 $|f'| \le \sqrt{2M_0M_2}$. □.

8. 一些名词介绍.

① 我们遇见了 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $f^{(n)}(0) = 0$. 但 $f \not\equiv 0$ 这种函数.

这种无穷次可导函数称为光滑函数, 记作 C^∞.

对于 C^∞ 函数, 可写出其 Taylor 展开 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

如果还有极限意义下, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. 则称为实解析函数.

如果在复数意义下, 上述成立. 则称为全纯解析函数/全纯函数.

记作 C^ω.

从 C 到 C^k, C^∞, 实解析, C^ω 是函数正则性的提升.

以后大家还会学 Taylor 级数、Fourier 级数, 请记住以下四个函数类

写不出展开 → 写得出展开 → 展开收敛 → 展开收敛至自己.

它们分别不同, 逐级真包含.

② Euler公式.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\rightsquigarrow \quad e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\Rightarrow e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

这称为 Euler 公式.

并启发了. $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

作为三角函数的分析学定义.

从而不再依赖于几何直观.

这也是为什么 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

称为双曲正/余弦.