2025.12.2. 多元函数极限.

1. 累次极限和极限.

注意 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ 不同. 存在性也不能相互推导. 只有以下定理联系.

[定理1]. 如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$, $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ 存在,

则 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$.

Rmk. 换言之. 即使 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 存在, 也不知道 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ 是否存在.

Eg1. $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0. \end{cases}$ (极限存在, 累次极限不存在)

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, ($|x\sin\frac{1}{y}| \le |x| \to 0$)

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$.

极限存在而累次极限不存在只有这种情形 ☆

而 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在, 因为 $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$ 不存在

这也告诉我们, $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ 之间也没有关系!!! 极限号一般不可交换.

Eg2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$ (累次极限存在一个, 极限不存在)

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在, 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x}$ 不存在

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

Eg3. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$. （累次极限存在且相等，极限不存在）.

① $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y) = 0$.

然而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在 ☆

方法1. 极坐标. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$f(x,y) = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin2\theta$ 没有 $r\to0$ 时的一致极限.

方法2. 取 $y=kx$. 这是二元情形下的“左、右极限不相等”

$\lim\limits_{x\to0} f(x,kx) = \frac{k}{1+k^2}$ 没有一致的极限

2. 求多元函数极限的常见方法：极坐标. （在 $(x,y)\to(0,0)$ 或 (∞,∞) 的场合）.

由于 $(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}\to0$. 故常坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta) = 0$

$-2\le \quad \le 2$. 夹逼.

② $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$.

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2) = \lim\limits_{r\to0} \underbrace{r\ln r^2}_{\to0}\cdot\underbrace{(\cos\theta+\sin\theta)}_{-2\le\ \le2} = 0$.

④ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}$

取对数后 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2) = \lim\limits_{r\to0} \underbrace{r^2\ln r^2}_{\to0}\cdot\underbrace{(\sin\theta\cos\theta)}_{-1\le\ \le1} = 0$.

⑤ $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \lim\limits_{r\to+\infty}\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2(1-\frac{1}{2}\sin2\theta)} = \lim\limits_{r\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{r}}_{\to0}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}{1-\frac{1}{2}\sin2\theta}}_{|\cdot|\le2\sqrt2} = 0$.

⑥ 易错点. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{r\to0}\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$

(i) $\theta\neq0,\pi$ 时，RHS $=0$ (ii) $\theta=0,\pi$ 时，$x=0$ 或 $y=0$. 故就是0.

因此推出 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0$. 该过程是错误的. ☆

毛病在不能固定 θ，对 r 求极限. 应该允许 θ 变动，对 r 求一致的极限.

例如选取路径 $\sin\theta = r\cos^2\theta$.

则 $RHS = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^2\cos^4\theta}{2r^2\cos^4\theta} = \dfrac{1}{2} \neq 0$.

因此极限不存在

Rmk. $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 上. 选取 $y=kx$. $\forall k\in\mathbb{R}$. 极限均为 0.

但这也推不出 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 存在.

因为 (x,y) 还可以沿着 $y=kx^2$ 趋近 $(0,0)$. 此时极限是 $\dfrac{k}{1+k^2}$

不一致.

3. 放缩举例. (常用于三角函数、指数等场合)

① $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0 \\ y, & x=0,\ y\neq 0. \end{cases}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

$\left|\dfrac{\sin xy}{x}\right| \le \dfrac{|xy|}{|x|} = |y|$. 故 $|f(x,y)| \le |y|$.

知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

② $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

$|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}| \le |x+y|$ 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} = 0$.

Rmk. 这个函数在 $(0,0)$ 处累次极限均不存在.

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

$\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2}$. 故原式 $\le (\dfrac{1}{2})^{x^2} \to 0$.

知 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$.

Rmk. 底数 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 并不存在

这题无法取对数求解.

4. 利用等价无穷小替换、Taylor公式.

① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{xy}{x} = \lim\limits_{y\to a} y = a.$

$\sin X \sim X \quad (X \to 0)$

② $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x \neq 0 \\ y, & x = 0. \end{cases}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

$(x,y)\to(0,0)$ 时, $\ln(1+xy) \sim xy.$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x} = \lim\limits_{y\to 0} y = 0.$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

这个过程是错误的!!!

因为它将 $x\neq 0$ 和 $x=0$ 分开考虑了

可能遗漏某些路径.

应该这样. $(x,y)\to(0,0)$ 时, $\dfrac{\ln(1+xy)}{x} = \dfrac{xy+o(xy)}{x} = y+o(y).$

故 $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} y+o(y), & x\neq 0 \\ y, & x=0 \end{array} \right\} = y+o(y).$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

取对数 $= \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)} \dfrac{x^2}{x+y} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)} \dfrac{x^2}{x+y} \left(\dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)} \left(\dfrac{x}{x+y} + o(1)\right) = 1.$

故原极限为 e.

④ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{xy}{e^x-1} + \sin y\right) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ (往年).

$= 1+X+o(X)-1 = X+o(X).$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\dfrac{xy}{X+o(X)}}_{\frac{y}{1+o(1)}\to 0} \cdot \underbrace{\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}}_{1\cdot|\leq 1} + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\sin y}_{\to 0} \underbrace{\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}}_{1\cdot|\leq 1} = 0+0 = 0.$

⑤ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+(\tan y)^2}$ （往年）

(i) 令 $y=x$. 该极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+\tan^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2+o(x^2)} = \dfrac{1}{2}$

(ii) 令 $y=kx$. 该极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx^2}{x^2+\tan^2 kx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2+o(x^2)} = \dfrac{k}{1+k^2}$.

故极限不存在.

Rmk. 绝对不能将 $\tan y$ 直接替换为 y.

因为 $\dfrac{xy}{x^2+\tan^2 y} = \dfrac{xy}{x^2+y^2+O(y^3)}$.

如果 $xy=O(y^3)$. 则直接替换就错了 → 如 $x=y^2$.

5. 几个复杂极限.

① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$.

取 $y=kx$. 上式 $= \dfrac{k^2x^4}{x^3+k^3x^3}$

$x>0$

① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

(i) 取 $y=x$. 极限为 1. (ii) 取 $y=0$. 极限为 $+\infty$.

故极限不存在.

② $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^4+y^2}$.

取 $y=kx^3$. 上式 $= \dfrac{kx^4}{x^4+k^2x^6} \to k$. 故极限不存在.

同学们可能有疑问. 为什么像这样上下主项均为二次，却会没有极限. 这和我们一元极限中的"数次数"是否矛盾?

这里需要注意. x 和 y 之间的阶关系是不确定的，因此上下主项其实不确定. 这由 $y=O(x^a)$ 的 a 未决定!!!

如 $y=O(x)$ 时，分子是 $O(x^2)$，分母是 $O(x^2)$

$y=O(x^2)$ 时，分子是 $O(x^3)$ 分母是 $O(x^4)$ 就会不同！

③ $\lim\limits_{(x,y)\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

法1. 极坐标后 $=\lim\limits_{r\to 0}\cos 2\theta$. 不存在.

法2. 累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1$

存在却不相等

故极限不存在.

☆

Rmk. 这是证明多元极限不存在的常见手段.

类比一元极限："左右极限不相等".

④ (法). $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos(\pi m!x)\right]^{2n}\right)$ $(m,n\in\mathbb{Z}^+)$.

分类讨论：(i) $x\in\mathbb{Q}$ 时. $\exists M\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall m>M$.

$m!x$ 是偶数. $\Rightarrow$ $\cos(\pi m!x)=1$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos(\pi m!x)\right]^{2n}=1$.

由序列极限定义. 上式 $=1$.

(ii) $x\notin\mathbb{Q}$ 时. $\forall m\in\mathbb{Z}^+$. $|\cos(\pi m!x)|<1$.

故对 $\forall m\in\mathbb{Z}^+$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos(\pi m!x)\right]^{2n}=0$.

$\Rightarrow$ 上式 $=0$.

综上：$\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos(\pi m!x)\right]^{2n}\right)=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

6. 关于二次曲面（术）.（以下需要线性代数知识）.

一般二次曲面形如 $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fzx$

$+2Gx+2Hy+2Iz+J=0$.

一般又写为 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}zx$

$+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$.

写成矩阵形式：$(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+2(x,y,z)b+c=0$.

这里，$A=(a_{ij})$. 为对称矩阵.

$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

可以通过旋转和伸缩/换元. 来消去 xy, yz, zx.

具体地，利用合同将A变为合同规范型.

$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$.

如果并不区分 $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$. 因为只差方程两侧 $\times -1$

则只有以下 $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$

共 6 种二次部.

① $A \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

$x^2+y^2+z^2+2b_1x+2b_2y+2b_3z+C=0$.

平移 $\rightsquigarrow$ $(x+b_1)^2+(y+b_2)^2+(z+b_3)^2=\tilde{C}$

形如 $x^2+y^2+z^2=C$. $\xrightarrow[(C>0)]{\text{伸缩}}$ $x^2+y^2+z^2=1$.

$C\le 0$ 平凡.

$C=0$ 时为一点.

椭球面 ①



② $A \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

$\rightsquigarrow$ $x^2+y^2-z^2=1$.

单叶双曲面



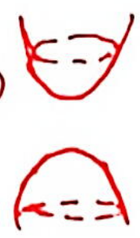
$x^2+y^2-z^2=0$.

二次锥面 ④



$x^2+y^2-z^2=-1$.

双叶双曲面



③ $A \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$x^2+y^2+2b_1x+2b_2y+2b_3z+C=0$.

平移 $\rightsquigarrow$ $(x+b_1)^2+(y+b_2)^2=-2b_3(z+\tilde{C})$. ⑤

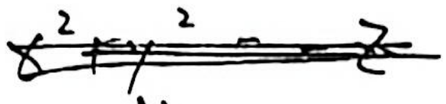
形如 $x^2+y^2=z$

椭圆抛物面 $(b_3\neq 0)$



其它平凡.

或



或

$x^2+y^2=1$

⑥

椭圆柱面. $(b_3=0,\ C<0)$



④ $A \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

$\rightsquigarrow$ $x^2-y^2=z$

或

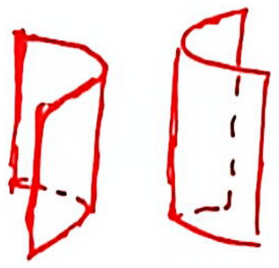
马鞍面 / 双曲抛物面 ⑦



$(b_3\neq 0)$

$x^2-y^2=1$

双曲柱面 ⑧



$(b_3=0)$

⑤ $A \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$



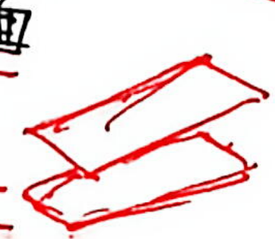
$x^2+2b_1x+2b_2y+2b_3z+C=0 \rightsquigarrow x^2=y+z+C$

换元 $\rightsquigarrow$ $Y=y+z+C$

$x^2=Y$ $b_2^2+b_3^2\neq 0$

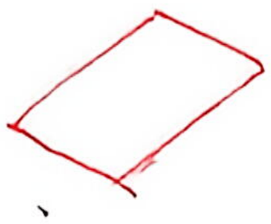
或 $x^2=1$. $b_2=b_3=0$. $C<0$.

分别对应 抛物柱面 ⑨



平行平面

⑥ $A \to (\circ\ \circ)$.　　平面



其中 ⑧①～⑨称为标准二次曲面.

平行平面和平面是"边界情况". 本质上是一次的.

〈常见参数表示〉

① 球坐标

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \rightsquigarrow \begin{cases} x = a\cos\varphi\cos\theta \\ y = b\cos\varphi\sin\theta \\ z = c\sin\varphi. \end{cases}$$

② 双曲坐标

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\pm 1. \rightsquigarrow \begin{cases} x = a\tan\varphi\cos\theta \\ y = b\tan\varphi\sin\theta \\ z = c\sec\varphi. \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}+1 \rightsquigarrow \begin{cases} x = a\sec\varphi\cos\theta \\ y = b\sec\varphi\sin\theta \\ z = c\tan\varphi. \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \Rightarrow \begin{cases} x = az\cos\theta \\ y = bz\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$

③ 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z. \rightsquigarrow \begin{cases} x = a\sqrt{z}\cos\theta\ t \\ y = a\sqrt{z}\sin\theta\ t \\ z = \frac{1}{a}t^2 \end{cases}$$

④ 柱坐标

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightsquigarrow \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightsquigarrow \begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \\ z = z. \end{cases}$$

⑤ 马鞍面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z \rightsquigarrow \begin{cases} x = a(u+v) \\ y = b(u-v) \\ z = 4uv \end{cases}$$

$$x^2 = y \rightsquigarrow \begin{cases} x = x \\ y = x^2 \\ z = z. \end{cases}$$