2025.9.30. 连续函数.

1. 间断点判断. (很快地).

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 0\le x\le 1 \\ \sin\frac{\pi}{x-1}, & 1<x\le 2. \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2-x}, & 0\le x\le 1 \\ x, & 1<x\le 2 \\ \frac{1}{1-x}, & 2<x\le 3. \end{cases}$$

只关注奇点即可!

2. 闭区间上连续函数.

有界性定理
最值定理
介值定理
} 合成一句话讲: 闭区间上连续函数值域是个闭区间.

常见问题是不动点问题.

① $f\in C[a,b]$. $f(x)\in[a,b]$. $\forall x\in[a,b]$. 求证: $\exists c\in[a,b]$ s.t. $f(c)=c$

证明: 一切存在交点的问题, 都变成存在零点的问题

用介值定理.

$f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$. 构造 $g(x)=f(x)-x\in C[a,b]$

$g(a)=f(a)-a\le 0$. $g(b)=f(b)-b\ge 0$

$\Rightarrow \exists c\in[a,b]$ s.t. $g(c)=c$. i.e. $f(c)=c$. □

② $f\in C[a,b]$. 且 $[a,b]\subset f([a,b])$. 求证 $\exists c\in[a,b]$ s.t. $f(c)=c$

证明: $g(x)=f(x)-x$.

由最值定理. $\exists x_1\in[a,b]$. s.t. $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)\ge b\ge x_1$

$x_2\in[a,b]$. s.t. $f(x_2)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)\le a\le x_2$

$\Rightarrow g(x_1)\ge 0$, $g(x_2)\le 0$

$\Rightarrow \exists c\in[a,b]$ s.t. $g(c)=c$ i.e. $f(c)=c$.

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

③ $f\in C[0,1]$. $f(0)=f(1)$. 求证: $\exists\alpha,\beta\in[0,1]$ s.t. $\beta-\alpha=\frac{1}{2}$
$f(\alpha)=f(\beta)$.

证明: 既然 $\beta-\alpha=\frac{1}{2}$. 那么 $\beta=\alpha+\frac{1}{2}$.

$f(\alpha)=f(\beta) \iff f(\alpha+\frac{1}{2})-f(\alpha)=0$. $\alpha\in[0,\frac{1}{2}]$.

构造 $g(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x) \in C[0,\frac{1}{2}]$.

$g(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$ $\quad g(1)=f(1)-f(\frac{1}{2})$

$=f(0)-f(\frac{1}{2})$

$\Rightarrow g(0)g(1)\le 0$. 故 $\exists\alpha\in[0,\frac{1}{2}]$ s.t. $g(\alpha)=0$. □.

3. 在开区间, 无穷区间上的拓展.

分段控制:
无穷远处因极限存在而有界
近处是一个闭区间.

① 无穷区间上的有界性定理.

$f(x)\in C[0,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\neq\infty$. 则 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

证明: ~~$\exists M>0$ s.t. $\forall x>M$. 有 $f(x)\in[A-1,A+1]$.~~

又 $f\in C[0,M]$. 故 $\exists N>0$ s.t. $|f(x)|\le N$, $\forall x\in[0,M]$

取 $M'=\max\{|A+1|,|A-1|,N\}$.

有 $\forall x\in[0,+\infty)$, $|f(x)|\le M'$. □.

② 开区间上的~~连~~有界性定理.

$f(x)\in C(a,b)$. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$. 则 f 在 (a,b) 有界.

证明: 令 $\tilde f(x)=\begin{cases}A, & x=a\\ f(x), & x\in(a,b)\\ B, & x=b.\end{cases}$

知 $\tilde f\in C[a,b]$.

故有界. 故 f 也有界 □.

Rmk. 请尝试模仿①, 用极限语言控制 a,b 附近 f 的行为, 也可以证出!!

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

说明：边界上有极限时，开区间上连续函数本质上
也是闭区间上连续函数.

③ 开区间介值定理

$f(x) \in C(a,b)$. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = B$. 则 $\forall C$ 在 A, B 之间 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f(\xi) = C$.

证明：仍定义 $\tilde{f}$. 并注意 $C \neq A, B$ 即证 □.

④ 无穷区间介值定理

$f(x) \in C(-\infty, +\infty)$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A < \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B$. 则 $\forall C \in (A,B)$ $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f(\xi) = C$.

A, B 不一定可达

证明：取 $\varepsilon > 0$. s.t. $A+\varepsilon < C < B-\varepsilon$.

$\exists M > 0$. s.t. $\forall x > M$. 有 $f(x) > B-\varepsilon$

$\forall x < -M$. 有 $f(x) < A+\varepsilon$.

那么. $f(-M) \le A+\varepsilon$, $f(M) \ge B-\varepsilon$.

而 $f \in C[-M, M]$. 故由介值定理. $\exists \xi \in [-M, M] \subset (-\infty, +\infty)$
s.t. $f(\xi) = C$. □.

⑤ 开区间、无穷区间上没有最值性！

通俗讲，这时我们仅知道值域仍为区间，但不一定是闭的！

例. 证明：$X^{18} + X^{12} - \cos X = 0$ 有至少 2 个根.

证明：$f(0) = -1 < 0$, $f(+\infty) = +\infty$, $f(-\infty) = +\infty$.

知 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 格至少有一个根 □.

Rmk. 学过 Rolle 中值定理后，我们还会证明，只有 2 个根.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

4. Heine归结原理.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任一 以a为极限的序列, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

变式. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在 $\Leftrightarrow$ 任一以a为极限的序列, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在.

①原定理证明: "$\Rightarrow$" $\forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0$ s.t. $\forall\ |x-a|<\delta.$ 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\exists N \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n > N.$ 有 $|x_n - a| < \delta.$

故 $\forall n > N.$ 有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon.$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ ✓

"$\Leftarrow$" 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 不对.

(注意: 这~~两~~不等价于 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B \neq A$!!! 可以不存在极限)

那么. $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. ~~$\forall N \in \mathbb{N}^+ \to n > N$~~.

$\forall \delta > 0 \quad \exists\ |x-a|<\delta.\ |f(x)-A| \geq \varepsilon_0.$

让 δ 取 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 对应 x 记作 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$

那么满足 $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ 不对.

矛盾. 故 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A.$ □.

② 变式证明: "$\Rightarrow$" 同①. 把极限设出来即可.

"$\Leftarrow$" 我们说明: $\forall \{x_n\} \to a.$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都相同.

否则 $\exists \{x_n\} \to a,$ $\{y_n\} \to a$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \neq B = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$

那么. 取 $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots$

是 $\to a$ 的序列. 而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ 不存在. 矛盾.

记为 $\{z_n\}$

故可设 $= A$ s.t. $\forall \{x_n\} \to a.$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A.$ 再用Heine定理即可

有 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

③ 不连续性检验.

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}.$$

说明此数极限不存在，归结为找两个不同极限的序列.

④ $f(x)\in C(0,+\infty)$. $f(x^2)=f(x)$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

$f(2021)=1$. 求 $f(2022)$. (证明 $f(x)=1$. $\forall x\in(0,+\infty)$).

解: $1=f(2021)=f(2021^{\frac{1}{2}})=f(2021^{\frac{1}{4}})=\cdots=f(\sqrt[2^n]{2021})$.

由 f 在 1 处连续. 知 $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt[2^n]{2021})=1$. Heine

同理, $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt[2^n]{C})$ $\forall C\in(0,+\infty)$.

故 $f(C)=f(1)=1$. $\forall C\in(0,+\infty)$. □.

5. 一些病态函数. (连续只是点性质!!!)

① 仅在 0 处连续的函数. $f(x)=xD(x)$

② 仅在 0 处可导, 其余点间断. $f(x)=x^2D(x)$

③ 存在仅在 0 处二阶可导, 其余点间断的函数吗?

不存在. 0 处二阶可导, 要求 0 附近一阶导存在.

④ 仅在无理点连续的函数.

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}.\ (p,q)=1,\ q>0.\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

6.* 整体的连续性 (建议了解. 在 Riemann-Lebesgue 中很有用).

$f\in C[a,b]$. 则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\eta>0$ s.t. $\forall x,y\in[a,b]$. $|x-y|<\eta$

就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. (一致连续性)

Rmk. 这个 η 是区间 $[a,b]$ 决定的. 不像说 f 在 a 处连续时 η 由 a 一点决定. 不同 a 处 η 可以不同. "不一致".

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

连续函数的阶梯逼近.

$f \in C[a,b]$. 则 $\forall \varepsilon > 0$. 存在 $[a,b]$ 上一个阶梯函数 $g(x)$

s.t. $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. $\forall x \in [a,b]$.

证明: 用 f 一致连续. 将 $[a,b]$ 切成 N 段, 每段长度 $< \eta$.

取 $g(x)$ 在每一段上为 $f(x)$ 在这段上最小值即可.

这是说: 连续函数和分段常函数"差不多"!!

7. 非公式求导.

求 $f(x) = \begin{cases} x^m \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 0 处导数. $m >$ ▮.

解: $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} x^{m-1} \sin\frac{1}{x} = 0$.

8. 参数方程求导注意事项. d^2x 和 dx^2 不一样!!!

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}}$$ ☆. 这不对.

正确的是 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$.

例子. $y = \sqrt{1-x^2}$ ~ $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y''(x) = -\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\neq -\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

$\forall f(x)$. 导函数的介值性.

介值定理说明. 闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 有介值性.

考虑基仅问题: 闭区间上介值函数一定连续吗?

答案为否定, 我们有以下定理.

[Darboux 中值定理].

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上介值.

证明: 不妨设 $f'(a)<0$, $f'(b)>0$.

我们说明 $\exists C\in[a,b]$ s.t. $f'(x)=0$.

根据定义. $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)<0$.

故 $\exists \delta_1>0$ s.t $\forall x\in(a,a+\delta_1)$. 有 $f(x)<f(a)$.

同理, $\exists \delta_2>0$ s.t. $\forall x\in(b-\delta_2,b)$ 有 $f(x)<f(b)$.

那么, 由于 $f\in C[a,b]$. $\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $f(x_0)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$

$<f(a),f(b)$.

故 $x_0\in(a,b)$. 故必有 $f'(x_0)=0$. □.

Eg.1. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

不连续, 但介值

Eg.2. $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 不是任何函数的导函数.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App