2025.10.14. 导数和积分.

0. 作业 1.6.2. $0<\varepsilon<1$. 则 $\forall y_0\in\mathbb{R}$. $\exists! x$ s.t. $y_0=x-\varepsilon\sin x$.

(*) 压缩映照不动点唯一性

$X=f(x)$. 其中 $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$. $0<L<1$. $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

则不动点存在就唯一.

证明: 设 $x=f(x)$, $y=f(y)$ 均为 f 不动点,

则 $x-y=f(x)-f(y)$

$$|x-y|\le|f(x)-f(y)|\le L|x-y|\le|x-y|.$$

取等号当且仅当 $x=y$. □.

说明: 证明方程解唯一的手法, 设两个解 x,y

去证明 $x=y$.

Eg. (2024.8.) $A,B\in C[0,1]$. $0\le A,B\le 1$. 对 $f\in C[0,1]$

定义. $Tf(x)=B(x)+\int_0^x A(t)f(t)dt$. 求证: $Tf=f$ 至多一解

思路: 找 f,g s.t. $Tf=Tg$

则 $f-g=Tf-Tg=\int_0^x A(t)(f-g)(t)dt$.

去证明 $f\equiv g$.

即要证: 若 $f(x)=\int_0^x A(t)f(t)dt$.

则 $f(x)\equiv 0$. ← Gronwall 不等式.

隐函数求导题

(1) $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$　　(2) $e^{xy}-5x^2y=0$.

统一做法：$F(x,y)=0$. 求 $\frac{dy}{dx}$

Step1. 求微分. $0=dF=\frac{dF}{dx}\cdot dx+\frac{dF}{dy}\cdot dy$

其实就是偏导数.

Step2. 整理.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{dF/dx}{dF/dy}.$$

1. 幂指型导数.

$\frac{d}{dx}(f(x)^{g(x)})$. 令 $y=f(x)^{g(x)}$ 先取对数

$$\ln y=g(x)\ln f(x)$$

求导. $\frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)}{f(x)}f'(x)$

$$\Rightarrow y'=y\cdot\frac{y'}{y}=\underbrace{f(x)^{g(x)}g'(x)\ln f(x)}_{\text{实际上是 }(f^{g(x)})'=f^{g(x)}\ln f\cdot g'(x)}+\underbrace{f(x)^{g(x)-1}f'(x)}_{\text{实际上是 }(f(x)^g)'=f(x)^{g-1}f'(x)}.$$

Eg. $y=x^{\sqrt{x}}$.　　$\ln y=\sqrt{x}\ln x$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}.\quad\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ln x+\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(\ln x+2)$$

Eg. $y=x^{\arcsin x}$.　　$\ln y=\arcsin x\cdot\ln x$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\quad\Rightarrow y'=\frac{x^{\arcsin x}\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\cdot x^{\arcsin x-1}.$$

2. n阶导问题. 使用 $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

① ~~f(x)~~ $y = \arctan x$. $y^{(n)}(0) = ?$

Step1. 求一次导. $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

Step2. 化成隐函数 $(1+x^2)y' = 1$

Step3. 两边求n阶导 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (1+x^2)^{(k)} y^{(n-k+1)} = 0$. $n \geq 2$

Step4. 左边只有前几项 $C_n^0 (1+x^2) y^{(n+1)} + C_n^1 \cdot 2x y^{(n)} + C_n^2 \cdot 2 y^{(n-1)} = 0$

Step5. 代入 $x=0$ $y^{(n+1)}(0) + 0 + n(n-1) y^{(n-1)}(0) = 0 \quad n \geq 2$.

即 $y^{(n+2)}(0) = -(n+1)n\, y^{(n)}(0) \quad n \geq 1$.

Step6. 写初值, 求通项.

$y^{(1)}(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$

$y''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. $y''(0) = 0$. $y(0) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} y^{(2n)}(0) = 0. \\ y^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \cdot (2n)! \end{cases}$$

② $y = \arcsin x$. $y^{(n)}(0) = ?$

Step1. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Step2. $\sqrt{1-x^2}\, y' = 1$.

Step3. $\sqrt{1-x^2}$ 在 Leibniz 公式中不会消失!!! 再求一阶尝试化简.

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y' + \sqrt{1-x^2}\, y'' = 0$$

Step2' $\Rightarrow$ $(1-x^2) y'' = x y'$ 这样可以求 n 阶导了.

Step 3, 4 $C_n^0(1-x^2)y^{(n+2)} + C_n^1(-2x)y^{(n+1)} + C_n^2(-2)y^{(n)}$

$= C_n^0 x y^{(n+1)} + C_n^1 y^{(n)}$

Step 5 代入 $x=0$.

$$y^{(n+2)}(0) - n(n-1)y^{(n)}(0) = n y^{(n)}(0)$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0). \qquad n \geq 2.$$

Step 6. 初值. (i) 由 $(1-x^2)y'' = xy'$

令 $x=0$. 知 $y''(0) = 0$.

(ii) 再求导. $(1-x^2)y^{(3)} - 2xy'' = y' + xy''$

令 $x=0$. $y^{(3)}(0) - 0 = y'(0) + 0$

$$y^{(3)}(0) = y'(0) = 1.$$

求通项 : $y'(0)=1$, $y''(0)=0$, $y^{(3)}(0) = 1^2 \cdot y'(0) = 1$.

$$y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^{(2n)}(0) = 0 \\ y^{(2n+1)}(0) = ((2n-1)!!)^2. \quad (n \geq 1). \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

3. 积分学.

Recall. $f \in C[a,b]$. 则满足一致连续性. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \eta > 0$ s.t. $\forall |x-y| < \eta$

$x, y \in [a,b]$. 有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

直接推论. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \eta > 0$. 取 $\frac{b-a}{n} < \eta$. ~~常定~~

分段常函数逼近.

取分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$

则 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$i = 1, 2, \cdots, n$

令 $g(x) = f(\xi_i)$. $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$\in [x_{i-1}, x_i]$ 有 $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$

① Cauchy 积分.

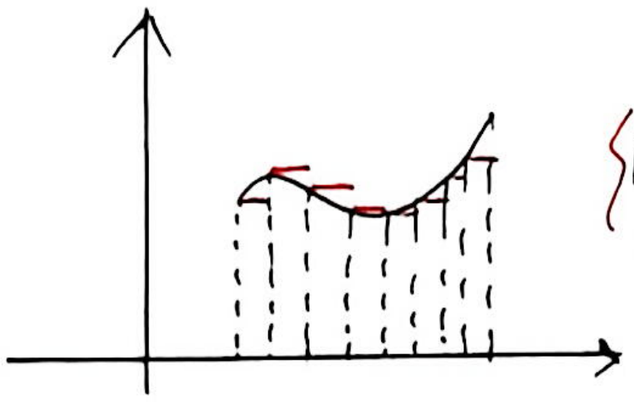
对连续函数定义积分.

$f \in C[a,b]$. 则 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$ 存在. 记为 $\int_a^b f(x)\,dx$.

说明: $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. $\lambda(\Delta)=\max\limits_i \Delta x_i$.

$\forall \varepsilon>0$. $\exists \eta>0$. 当 $\lambda(\Delta)<\eta$. 有 $|f(x)-f(x_{i-1})|<\varepsilon$.

$\forall x\in[x_{i-1},x_i]$. $i=1,2,\cdots,n$



即左矩形逼近 ☆.

证明: 记 $m_i=\min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i=\max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$.

则 $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i \le \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$.

当 $\lambda(\Delta)<\eta$. 有 $M_i-m_i<\varepsilon$.

这是说, 连续函数可以从上、下两个方向用分段常函数逼近(逐点意义下).

又 $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$ 关于 Δ 细分↗.

$\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ 关于 Δ 细分↘.

故夹逼知 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$ 存在. □.

② Riemann 积分.

若 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在, 则记为 $\int_a^b f(x)\,dx$. 称 $f\in R[a,b]$.

这扩充了 Cauchy 积分, 允许对不连续函数积分.

本质上, 这是说, 可以用分段常函数在积分意义下逼近 f.

i.e. $\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta>0$. 可取 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, $\lambda(\Delta)<\delta$.

s.t. $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon$.

这时. 取 $g(x)=f(\xi_i)$, $x\in[x_{i-1},x_i)$ $i=1,2,\cdots,n$ (n时取右闭)

则 $\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right|<\varepsilon$.

进一步地，可以在 L^1 意义下逼近

[定理]. $f \in R[a,b]$. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists$ 分段常函数 g s.t. $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$.

证明这件事需要以下 Darboux 理论.

③ Darboux 积分.

习题2.8.9. (Darboux 理论).

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 任一闭子区间上有最大、最小值. 对任一分割

$\Delta: x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. $m_i \triangleq \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

求证: $f \in R[a,b] \iff \lim_{\lambda(\Delta) \to 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \lim_{\lambda(\Delta) \to 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$

存在，且相等

这是说，可积函数可以从~~下，~~上、下两个方向用分段常函数逼近. (积分意义下)

证明: "⇒" 特殊地取 $f(\xi_i) = m_i$ 和 $f(\xi_i) = M_i$ 即可.

"⇐". $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$

夹逼定理即知 $\lim_{\lambda(\Delta) \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在 □.

那么，特殊地. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$. 当 $\lambda(\Delta) < \delta$.

有 $\left| \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$.

取 ~~$g(x) = f$~~ $g(x) = M_i$. $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

即有 $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx < \varepsilon$.

(*) Darboux 理论的其它表述

(i) $\overline{\int_a^b} f(x) dx \triangleq \lim_{\lambda(\Delta) \to 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$

$\underline{\int_a^b} f(x) dx \triangleq \lim_{\lambda(\Delta) \to 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$

总存在，称为上、下积分.

描述了"上、下逼近".

$f \in R[a,b] \iff \underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$. 此时 $\underline{\int_a^b} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$

(ii) 振幅表述.

$f \in R[a,b]$. $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = 0$.

如果记 $\omega_i = M_i - m_i$ 为 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 $f(x)$ 的振幅

则 $f \in R[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$.

这是说, f 可积意思就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上振荡得不剧烈.

(iii) $f \in R[a,b]$. $\Leftrightarrow$ ~~存在一个分割 Δ.~~

$\forall A>0$, $\varepsilon>0$. 存在一个分割 Δ.

s.t. $\omega_i \geq A$ 的区间总长度 $< \varepsilon$.

练习. 在有限个点上更改 $f(x)$ 的值, 不改变可积性与积分值.

(*) Riemann可积充要条件. (Lebesgue)

$f \in R[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f 几乎处处连续.

④ Lebesgue 积分. ($f \in L[a,b]$)

允许更病态的函数. (即剧烈振荡).

R-积分定义为 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 是划分定义域再求和. 从本质上无法处理太高频的振荡. 即在充分小的区间上, $f(x)$ 必需足够简单 (被常函数近似). 才可积.

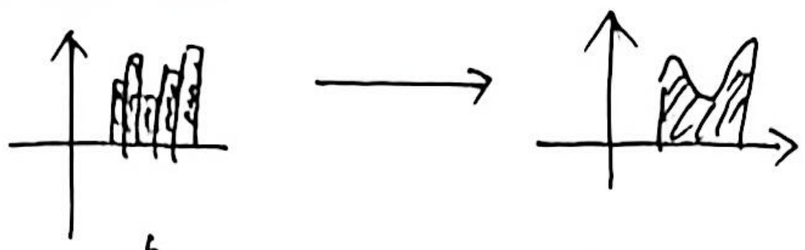
L-积分通过划分值域再求和, 避免了该问题.

Eg. 对 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ R-不可积,

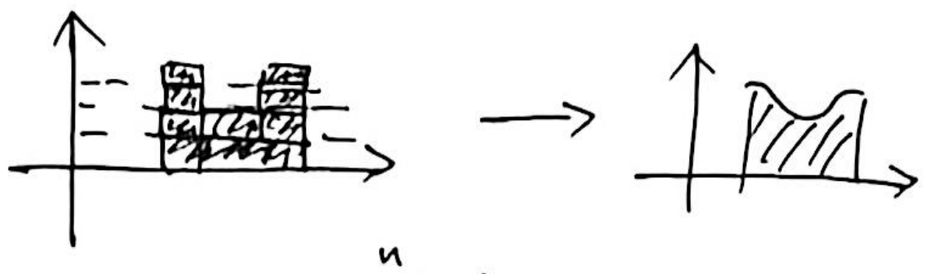
而 L-积分定义为 $\int_a^b D(x)\,dx$ = $1 \times [a,b]$ 中 $\mathbb{Q}$ 的长度 + $0 \times [a,b]$ 中 $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ 的长度 = $0 \times (b-a) = 0$.

一种理解：$f\in R[a,b]$. $\int_a^b f(x)dx$ 可理解为用一列分段常函数 $\{g_n\}$ 的积分 $\int_a^b g_n(x)dx$ 逼近 $\int_a^b f(x)dx$.

容易定义.



$f\in L[a,b]$. $\int_a^b f(x)dx$ 可理解为用一列简单函数 $\{g_n\}$ 的积分 $\int_a^b g_n(x)dx$ 逼近 $\int_a^b f(x)dx$



这里 $g_n(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x)$ A_i 为 g_n 取 c_i 的集合

$$\chi_{A_i}(x)=\begin{cases}1, & x\in A_i\\ 0, & x\notin A_i.\end{cases}$$

$$\int_a^b g_n(x)dx=\sum_{i=1}^{n} c_i|A_i|$$

$|A_i|$ = A_i 的分长度!

⑤ Ito 积分. (金融中常用，描述随机现象).

微积分在随机过程上的推广.

$$\int_0^t b(x_s,s)dW_s \triangleq \lim_{\lambda(\Omega)\to 0}\sum_{i=1}^{n} b(x_{i-1},t_{i-1})(W_i-W_{i-1})$$

这里 $dx_t=f dt+g dW_t$. W_t 为 Brown 运动.

⑥ Stieltjes 积分.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda(\Omega)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

$g(x)=x$ 即 R-积分.

定义. $\int_a^b f(x)dg(x)=\lim_{\lambda(\Omega)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1}))$.

这里 $g(x)$ 是递增函数. 不一定严格增.

在概率论中常用.

〈一道往年题〉. Riemann - Lebesgue 引理.

$f(x) \in \underline{R}[a,b]$. 求证: $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$

↓ 原题为 C.

说明: 我们先对简单的 f 证明, 再用简单的 f 逼近某一般 f. ☆

(1) 证明: $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$

(2) 证明: $\left|\int_a^b \sin nx\,dx\right| \le \frac{2}{n}$. $\forall a < b$.

(3) 证明: 对 $f(x) \equiv C$. 原命题成立

(4) 证明: 对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上分段常值, 原命题成立.

(5) 证明: 对 $f(x) \in C[a,b]$. 原命题成立.

(6) 证明原命题.

(1) 证明: $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2$. □

(2) 证明: $\left|\int_a^b \sin nx\,dx\right| = \left|-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_a^b\right|$

$\le \frac{1}{n}(|\cos nb| + |\cos na|) \le \frac{2}{n}$. □

(3) 证明: $f(x) \equiv C$.

$\lim \int_a^b f(x)\sin nx\,dx = C\cdot\int_a^b \sin nx\,dx$

故 $\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right| \le \frac{2|C|}{n}$.

那么, $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n > N$. 有 $\frac{2|C|}{n} < \varepsilon$.

i.e. $\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right| < \varepsilon$.

故 $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b C\cdot\sin nx\,dx = 0$. □

(4). 证明：设 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上常值 c_i

则 $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = \sum_{i=1}^{n}\lim_{n\to+\infty}\int_{x_{i-1}}^{x_i} c_i\sin nx\,dx = 0$ □.

(5). 证明：$\forall \varepsilon>0$. $\exists g(x)$ 分段常值 s.t. $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in[a,b]$.

只证 $\left|\int_a^b (f(x)\sin nx - g(x)\sin nx)\,dx\right|$

$\le \int_a^b |f(x)-g(x)|\cdot|\sin nx|\,dx$

$\le \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx < (b-a)\varepsilon$.

再证 $\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right| \le (b-a)\varepsilon + \left|\int_a^b g(x)\sin nx\,dx\right|$

由(4). $\exists N\in\mathbb{N}^+$. s.t. $\forall n>N$. $\left|\int_a^b g(x)\sin nx\,dx\right|<\varepsilon$.

故 $\forall \varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right| < (b-a+1)\varepsilon$.

即 $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$.

(6). 证明：$\forall \varepsilon>0$. $\exists g(x)$ 分段常值 s.t. $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon$.

则同(5). $\exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n>N$

$\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right| \le \varepsilon + \left|\int_a^b g(x)\sin nx\,dx\right|$

$< \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$.

即 $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$.

Rmk. 以上用了两种逼近. 一种是 $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$. $\forall x\in[a,b]$

称为 L^∞ 逼近. 描述 f,g 点点靠近.

一种是 $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon$.

称为 L^1 逼近. 描述 f,g 在积分意义下靠近.

什么是靠近？需要定义 f,g 的距离.

一般常用. $\|f-g\|_p \triangleq \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}$ 称为 L^p 距离. $1\le p\le+\infty$

L^2 即欧氏距离. $\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx<\varepsilon$. 也称为均方逼近 (Fourier级数)

4. Riemann 和型极限.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

ξ_k

$\xi_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$.

把以下极限写成定积分.

① $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n} = \int_0^1 \sin x\,dx = 1-\cos 1.$

② $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$

③ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$

④ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n^k k}\right).$ $= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\xi_k = \int_0^1\cos x\,dx = \sin 1.$

2024年题.

ξ_k

$\frac{k}{n} > \xi_k = \frac{k}{n} - \frac{1}{n^k k} \geq \frac{k}{n} - \frac{1}{n} = \frac{k-1}{n}$

(*)若有时间

5. 分段估计, 积分取极限.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = ?$$

① 直觉上. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,dx = 0$

但这个交换不严格. 可以人这样猜着

但不可以这样写.

② 证明: $\forall\,\varepsilon > 0.$

(i) $\left[0, \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ 上, $\sin^n x < \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) \longrightarrow 0.$

即 $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n > N.$ $\sin^n x < \varepsilon.$ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right].$

(ii) ~~$\left[\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$~~ 上, $\sin^n x \leq 1.$

$\left[\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \forall n > N.\ 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

$< \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\varepsilon\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx$

$< \varepsilon\cdot\frac{\pi}{2} + \varepsilon = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = 0$