2025.11.4. 定积分应用 & 拾遗.

1. 作业中的定积分应用题.

① $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx$

$\xlongequal{y=-x}\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{\sin^4(-y)}{1+e^{y}}(-1)dy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^4 y\cdot e^{-y}}{1+e^{-y}}dy$

故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^4 x\left(\frac{1}{1+e^{-x}}+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^4 x\,dx$

$=\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\times1}{4\times2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi.$

② $\int_0^{2m\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}\triangleq I.$

(i) 注意到 $\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$ 以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期.

故 $I=4m\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x}$

(ii) $\int_0^{\pi/2}\frac{4\,dx}{3+\cos 4x}\xlongequal{y=4x}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{3+\cos y}$

$\int\frac{dy}{3+\cos y}\xlongequal{t=\tan y/2\ \text{万能公式}}\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$

$\tan\frac{y}{2}=\frac{2t}{1-t^2}$

$\cos y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

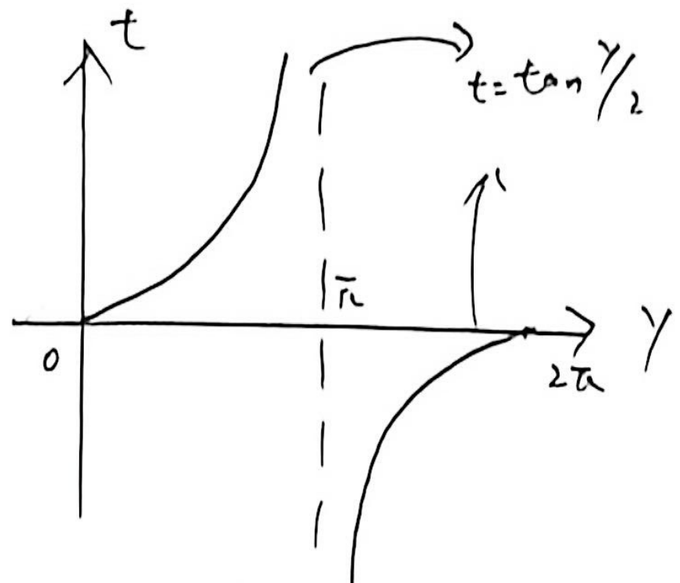
$\sin y=\frac{2t}{1+t^2}$

$dy=\frac{2dt}{1+t^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$

(iii) 注意 y 从 0 变到 2π

$t=\tan y/2$ 变化如右图.



即从 $0 \to +\infty$

再从 $-\infty \to 0$. 有间断

故应分开两个区间积分 ✱.

一定注意!!!

$$\int_0^{2\pi} \frac{dy}{3+\cos y} = \int_0^{\pi} \frac{dy}{3+\cos y} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dy}{3+\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t/\sqrt{2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t/\sqrt{2} \Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

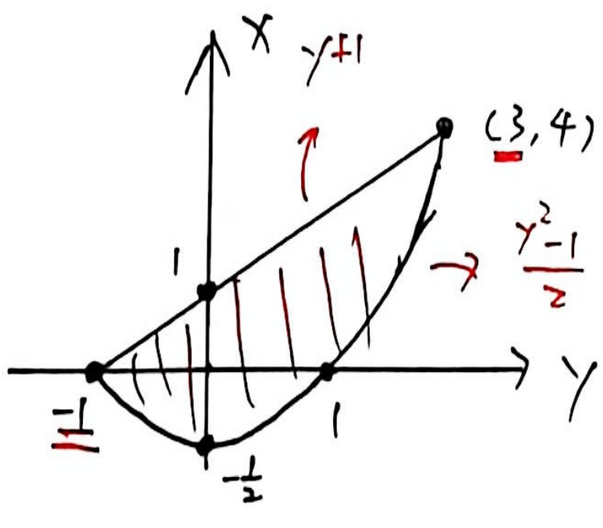
$$\Rightarrow I = 4m \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2m\sqrt{2}\pi.$$

例 3.4.3. 求 $y^2=2x+1$ 与 $x-y=1$ 围成面积.

Step 1. 这是 $x=\frac{y^2-1}{2}$ 和 $x=y+1$.

写成 $x=f(y)$ 形式更好做.

Step 2. ~~写成积分~~ 画图, 写成积分



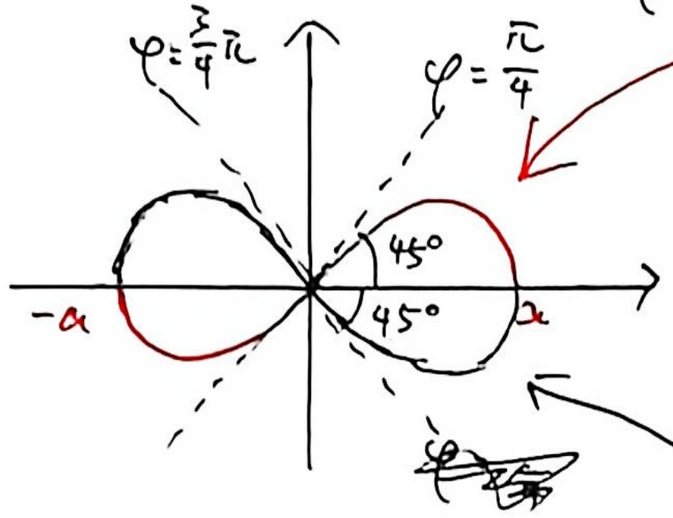
$$S = \int_{-1}^{3} (y+1) - \frac{y^2-1}{2}\, dy$$

$$= \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y\right)\Big|_{-1}^{3} = \frac{16}{3}.$$

3.4.8

例 算 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$. $(a>0)$. 面积.

Step1. 画图. 注意 φ 的取值和图线对应.



$r(0) = \pm a$.

$r(\frac{\pi}{4}) = 0$.

$\varphi \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$ 时, $\cos 2\varphi < 0$.

没图像.

$r(\frac{3}{4}\pi) = 0$

$r(\pi) = \pm a$

Step2. 利用对称性, 最大限度减小积分区间.

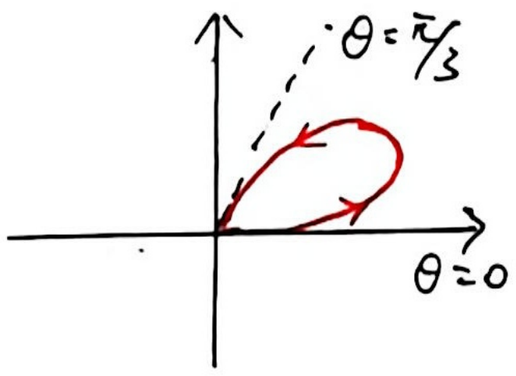
$$S = 4\cdot\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

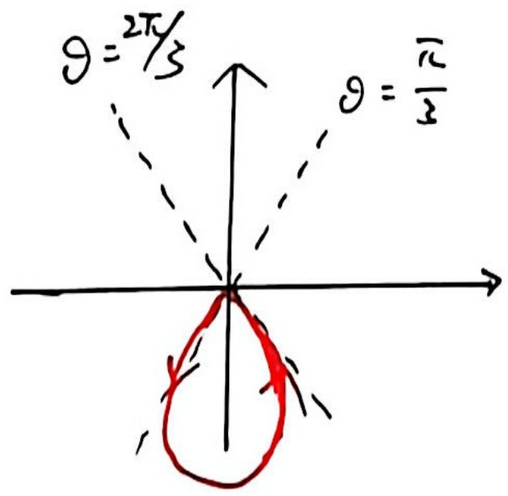
$$= 2\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi \xlongequal{\theta=2\varphi} a^2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta.$$

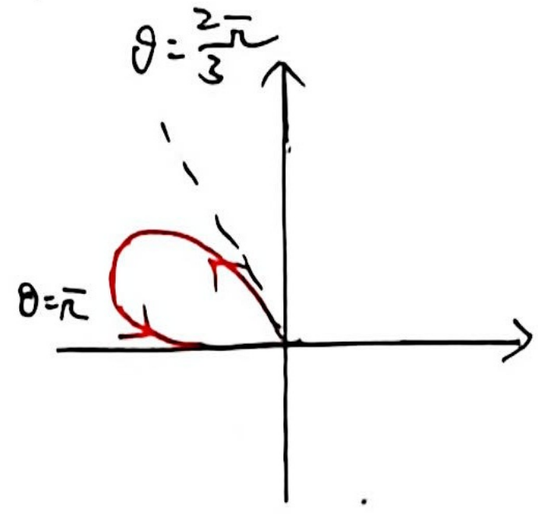
$$= a^2.$$

⑤ $n\geq 3$ 奇数. 求 $r=\sin n\theta$ 围成面积 (n叶玫瑰线)

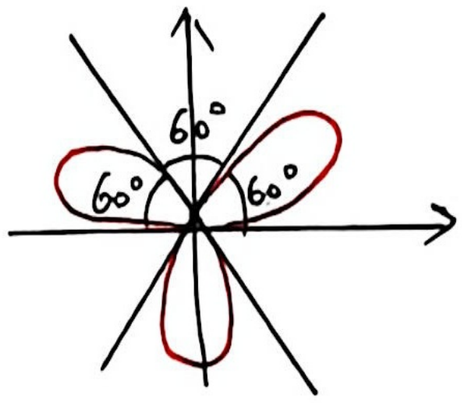
Step1. 以 $n=3$ 为例







完整图形



Step2. $S = \frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} r^2(\theta)\, d\theta = \frac{n}{2}\int_0^{\pi/n} \sin^2 n\theta\, d\theta$

把3换成 n 即得 $r=\sin n\theta$ 的答案. 也是 $\pi/4$.

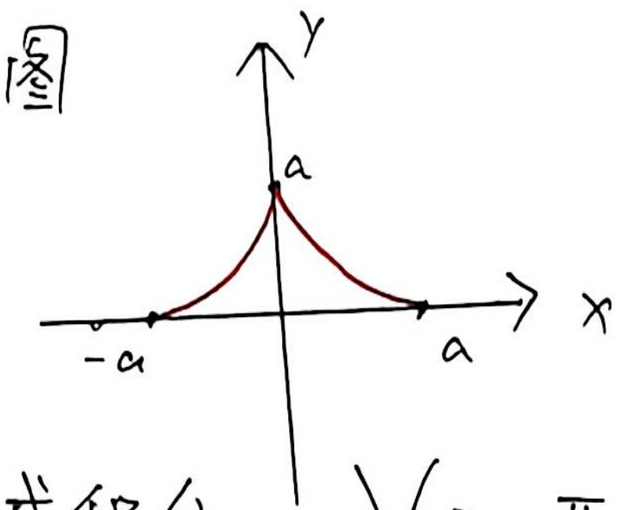
$$\xlongequal{t=n\theta} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\, dt$$

$$\xlongequal{x=2t} \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos x)\, dx = \frac{\pi}{4}$$

思考: 偶数哪里不同?

⑥ 算 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ $(a>0)$ 绕 x 轴转一周体积.

Step1. 画图



写成函数. $y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{2/3})^{\frac{3}{2}}$

Step2. 写成积分. $V=\pi\int_{-a}^{a}y^2(x)\,dx$

$=\pi\int_{-a}^{a}(a^{2/3}-x^{2/3})^3\,dx$

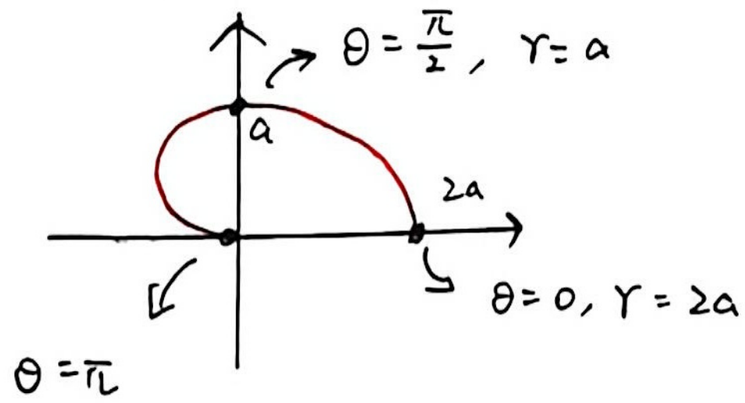
$=2\pi\int_0^a(a^2-3a^{4/3}x^{2/3}+3a^{2/3}x^{4/3}-x^2)\,dx$

$=2\pi\cdot(a^2x-\frac{9}{5}a^{4/3}x^{5/3}+\frac{9}{7}a^{2/3}x^{7/3}-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^a$

$=\frac{32}{105}\pi.$

⑦ 算心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 全长.

Step1. 画图.



$\pi\le\theta\le 2\pi$. 为关于 x 轴对称

$0\le\theta\le\pi$

Step2. 写成积分

$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta=2\int_0^{\pi}a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta$

$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$

$=4a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=8a\int_0^{\pi/2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a.$

2. Cauchy 命题.

① $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$.

令 $b_n = a_n - a$ 套路设定 ☆.

证明: $\forall \varepsilon>0$. $\exists N \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n > N$. $|a_n - a| < \varepsilon$.

那么, $\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - a\right|$

$$\le \left|\frac{a_1+\cdots+a_N}{n} - \frac{aN}{n}\right| + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{|a_k-a|}{n}$$

($|a_k-a| < \varepsilon$; 求和项 $< \varepsilon$)

$$< \left|\frac{a_1+\cdots+a_N - Na}{n}\right| + \varepsilon.$$

注意此时, N 为定值, 而 n 还能 $\longrightarrow +\infty$

$$= \varepsilon + \frac{1}{n}\cdot\left|a_1+\cdots+a_N - Na\right| = \varepsilon + \frac{C}{n}.$$

($a_1+\cdots+a_N-Na$ 为常数, 记作 C)

即 $n>N$ 时, $0 \le \left|\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} - a\right| < \varepsilon + \dfrac{C}{n}$.

夹逼知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} - a\right| = 0$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a$. □ ($|x|$ 关于 x 连续. 故 $0 = \lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right|$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$).

② $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab$.

证明: $\forall \varepsilon>0$. $\exists N \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n > N$. 有 $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$

则 $\left|\dfrac{a_1b_n + \cdots + a_nb_1}{n} - ab\right|$

② $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 证 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k} = \dfrac{a}{1-\lambda}$ $(|\lambda|<1)$

证明：$\forall \varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n>N$. 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

证 $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k} - \dfrac{a}{1-\lambda} \right|$

$\le \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k} - \sum\limits_{k=1}^{n} a\lambda^{n-k} \right| + \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a\lambda^{n-k} - \dfrac{a}{1-\lambda} \right|$.

$\le \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda|^{n-k} \cdot |a_k-a| + |a| \cdot \underbrace{\left| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} - \dfrac{1}{1-\lambda} \right|}_{n\to\infty \text{ 时} \to 0}$.

$\le \underbrace{\sum\limits_{k=N+1}^{n} |\lambda|^{n-k}}_{\text{有界}} \cdot \underbrace{\varepsilon}_{\text{很小}} + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{N} |a_k-a|}_{\text{有界}} \cdot \underbrace{|\lambda|^{n-k}}_{\text{很小}} + \underbrace{|a|}_{\text{有界}} \cdot \underbrace{\left| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} - \dfrac{1}{1-\lambda} \right|}_{\text{很小}}$.

$\le \dfrac{\varepsilon}{\underbrace{1-|\lambda|}_{C_1}} + |\lambda|^{n-N} \cdot \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{N} |a_k-a|}_{C_2} + \underbrace{|a|}_{C_3} \cdot \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} - \dfrac{1}{1-\lambda} \right|$.

$\le C_1\varepsilon + |\lambda|^{n-N} \cdot C_2 + C_3 \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} - \dfrac{1}{1-\lambda} \right|$.

（现在，N 是定值，右端让 $n\to+\infty$. 有 $|\lambda|^{n-N}\to 0$

$\left| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} - \dfrac{1}{1-\lambda} \right| \to 0$.）

用 ε-N 语言说明

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda|^{n-N} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} - \dfrac{1}{1-\lambda} \right| = 0$.

故 $\exists N' \in \mathbb{N}^+$ s.t. $n>N'$ 时，$|\lambda|^{n-N} < \varepsilon / \sum\limits_{k=1}^{N} |a_k-a|$

$\left| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} - \dfrac{1}{1-\lambda} \right| < \varepsilon$.

证 $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k} - \dfrac{a}{1-\lambda} \right| \le \dfrac{\varepsilon}{1-|\lambda|} + \varepsilon + |a|\cdot\varepsilon$

只要 $n>N_1$.

取 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k} = \dfrac{a}{1-\lambda}$. □

3. 乘积型极限处理.

中心思想：取对数！

① $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}$

取对数后 $= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{k-1}{n}\right)$

Riemann和 $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left((x+1)\ln(1+x)-x\right)\Big|_0^1 = 2\ln 2-1.$

故原极限 $= 4/e$

② $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

取对数后 $= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\dfrac{k}{n} = \int_0^1 \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_0^1 = -1.$

原极限 $= \dfrac{1}{e}$.

另一种方法. 使用 Cauchy 命题.

如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln b_n = \ln b$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\sqrt[n]{b_1\cdots b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}(\ln b_1+\ln b_2+\cdots+\ln b_n)$

$= \ln b.$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_1\cdots b_n} = b.$

那么. 令 $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. 有 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{n!}{n^n}\cdot\dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-1} \longrightarrow \dfrac{1}{e}.$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1} = \dfrac{1}{e}.$

注. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 是著名的 Stirling 公式

即 $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ 的一种弱形式.

4. ~~我会~~积分取极限.

① $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 0$.

证明: (可以换元 $x=\cos x$ 直接算出来).

分析: ●离0远的地方, $(1-x^2)^n \longrightarrow 0$.

仅在很小的区间上, $(1-x^2)^n$ 较大. 做分段估计.

~~$\forall \varepsilon>0$~~. 在 $[-1,1]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上. $(1-x^2)^n \le (1-\varepsilon^2)^n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$

故 $\exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n>N$. 有 $[-1,1]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上. $(1-x^2)^n<\varepsilon$.

则 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = \int_{-1}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{1}(1-x^2)^n dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\underbrace{(1-x^2)^n}_{\le 1} dx$

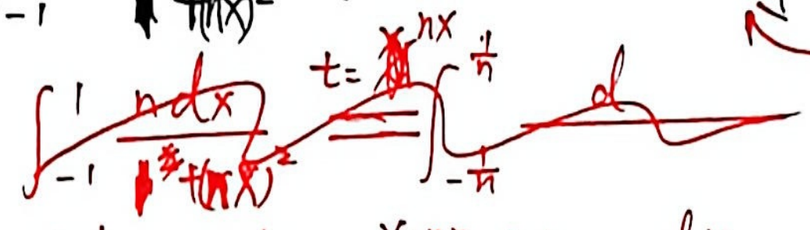
$< \varepsilon + 2\varepsilon\cdot 1 + \varepsilon = 3\varepsilon$.

即 $\forall \varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n>N$. 有 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx < 3\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 0$. □.

② $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}\frac{n}{1+(nx)^2}f(x)\,dx = \pi f(0)$. 这里 $f(x)\in C[-1,1]$.

分析:



但在离0远的地方, $\frac{n}{1+(nx)^2}\sim O(\frac{1}{n})\to 0$. 做分段估计.

证明:

$\forall \varepsilon>0$. ~~$\exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t.~~ $\exists \delta>0$. s.t. $\forall x\in(-\delta,\delta)$. 有 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$.

又 $\exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n>N$. 在 $[-1,1]\setminus(-\delta,\delta)$ 上, $\frac{n}{1+(nx)^2}<\varepsilon$.

故 $\left|\int_{-1}^{1}\frac{nf(x)}{1+(nx)^2}dx-\pi f(0)\right| \le \underbrace{\left|\int_{[-1,1]\setminus(-\delta,\delta)}\frac{nf(x)}{1+(nx)^2}dx\right|}_{\text{I}} + \underbrace{\left|\int_{-\delta}^{\delta}\frac{nf(x)dx}{1+(nx)^2}-\int_{-\delta}^{\delta}\frac{nf(0)}{1+(nx)^2}dx\right|}_{\text{II}}$

$+\underbrace{\left|\int_{-\delta}^{\delta}\frac{nf(0)}{1+(nx)^2}dx-\pi f(0)\right|}_{\text{III}}$.

$$\text{I.} = \left| \int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^{1} \frac{n f(x)}{1+(nx)^2}\, dx \right| \qquad \text{设 } |f(x)| \le F \text{ (证界性)}.$$

$$\le F \cdot \left| \int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^{1} \frac{n\,dx}{1+(nx)^2} \right| \le F \cdot \left| \int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^{1} \varepsilon\, dx \right|$$

$$\le 2F\varepsilon.$$

$$\text{II.} = \left| \int_{-\delta}^{\delta} \frac{n}{1+(nx)^2} \underbrace{(f(x) - f(0))}_{\exists\, \delta} dx \right|$$

$$< \varepsilon \cdot \left| \int_{-\delta}^{\delta} \frac{n\,dx}{1+(nx)^2} \right| \le \varepsilon \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n\,dx}{1+(nx)^2} = \pi\varepsilon.$$

$$\text{III.} = |f(0)| \cdot \left| \int_{-\delta}^{\delta} \frac{n\,dx}{1+(nx)^2} - \pi \right|.$$

$$= |f(0)| \cdot \left| 2\arctan(n\delta) - \pi \right|.$$

故 $\left| \int_{-1}^{1} \frac{n f(x)}{1+(nx)^2} dx - \pi f(0) \right| \le (2F+\pi)\varepsilon + |f(0)| \cdot \left| 2\arctan(n\delta) - \pi \right|.$

当 $n > N$.

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(n\delta) = \frac{\pi}{2}$. 故 $\exists N_1 > N$ s.t. $\forall n > N_1$

有 $\left| 2\arctan(n\delta) - \pi \right| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists N_1 \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n > N_1$ 有 $\left| \int_{-1}^{1} \frac{n f(x)}{1+(nx)^2} dx - \pi f(0) \right|$

$$\le (2F + \pi + |f(0)|)\,\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} \frac{n f(x)}{1+(nx)^2} dx = \pi f(0)$ □.

5. f 在 $[a,b]$ 上 ↗. 证: $\int_a^b xf(x)\,dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$.

证明: $(x-y)(f(x)-f(y)) \geq 0$. 单调性的一种特殊用法.

$\Rightarrow xf(x)+yf(y) \geq xf(y)+yf(x)$. Rmk. 某种排序不等式.

对 x 积分: $\int_a^b xf(x)\,dx + (b-a)yf(y)$

$\geq \frac{b^2-a^2}{2}f(y) + y\int_a^b f(x)\,dx$.

再对 y 积分: $(b-a)\int_a^b xf(x)\,dx + (b-a)\int_a^b yf(y)\,dy$

$\geq \frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(y)\,dy + \frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)\,dx$.

即 $(b-a)\int_a^b xf(x)\,dx \geq \frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)\,dx$.

即 $\int_a^b xf(x)\,dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$. □.

6. f 在 $[0,1]$ 上连续. $\int_0^1 f(x)x^k\,dx = 0$. $(k=0,1,2,\cdots,n)$.

求证: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少 $n+1$ 个零点.

证明: 否则, 设 f 的变号零点为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$. $(m \leq n)$.

构造多项式 $P(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_m)$ m 次

注意到 $f(x)P(x)$ 在 $(0,1)$ 上不变号. 故 $\int_0^1 f(x)P(x)\,dx \neq 0$.

但 $\int_0^1 f(x)x^k\,dx = 0$. $0 \leq k \leq m$. 矛盾!

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少 $n+1$ 个零点. □.

7. 对 $\int_0^1 |f'(x)|dx$ 的处理 (变差).

$f \in C^1[0,1]$. 求证: $\forall x \in [0,1]$. $|f(x)| \le \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |f'(t)|dt$.

证明: $\int_0^1 |f'(t)|dt \ge \int_a^b |f'(t)|dt$ ☆

$\ge |\int_a^b f'(t)dt| = |f(b) - f(a)|$. $\forall 0 \le a < b \le 1$.

故设 f 在 $[0,1]$ 上最大、最小值为 M, m.

有 $\int_0^1 |f'(t)|dt \ge M - m$.

故只需证明: $|f(x)| - \int_0^1 |f(t)|dt \le M - m$.

对 $\int_0^1 |f(t)|dt$ 处理一般用中值定理. $\exists \xi \in [0,1]$

s.t. $|f(\xi)| = \int_0^1 |f(t)|dt$.

故 $LHS = |f(x)| - |f(\xi)| \le |f(x) - f(\xi)| \le M - m$ □.