2025.11.11. 中值定理.

Recall. [Fermat 原理].

$f(x)$ 可导, x_0 为极值点, 则 $f'(x_0)=0$.

[Rolle 中值定理].

$f(x)$ 可导, $f(a)=f(b)$. 则 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f'(\xi)=0$.

[Lagrange 中值定理].

$f(x)$ 可导, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明: 希望找一个函数 $F(x)$,

s.t. $F'(\xi)=0 \iff f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ---(Δ)

现在对 (Δ) 做代数变形.

(Δ) $\iff f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$.

思考: 是可以直接让 $F'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

只需做不定积分!

回归, 构造 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.

因为 $F(a)=F(b)$. 故 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

[Cauchy中值定理]

$f(x), g(x)$ 可导. $g'(x) \neq 0$. 则 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

证明: 待证式 $\Leftrightarrow f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0$.

做不定积分.

构造 $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$.

$F(a) = F(b)$. $\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ s.t. $F'(\xi) = 0$

即 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ □.

变式 1. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(\xi)}{g(\xi)-g(a)}$

$\Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) - f(b)g'(\xi) - f(\xi)g(a) = 0$.

做不定积分

构造 $F(x) = f(x)g(x) - f(b)g(x) - f(x)g(a)$.

验证 $F(a) = F(b)$ 用 Rolle 即可. □.

变式 2. $f(1) = 0$. $\Rightarrow \exists \xi \in (0,1)$ s.t. $f'(\xi) = (1-\xi^{-1}) f(\xi)$

变形: $\Leftrightarrow \xi f'(\xi) + f(\xi) - \xi f(\xi) = 0$

$\Leftrightarrow (\xi f(\xi))' - \xi f(\xi) = 0$

$\Leftrightarrow (e^{-\xi} \xi f(\xi))' = 0$.

同样构造 $F(x) = e^{-x} x f(x)$.

$F(0) = F(1) = 0 \rightsquigarrow \exists \xi \in (0,1)$ s.t. $F'(\xi) = 0$

即 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1}) f(\xi)$ □.

变式3. $f(0)=f(1)=0$. $f(\frac{1}{2})=1$. 则 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. $\exists \xi \in (0,1)$

s.t. $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$.

证明：变形 $\Leftrightarrow f'(\xi)-1-\lambda(f(\xi)-\xi)=0$.

记 $g(\xi)=f(\xi)-\xi$.

上式 $\Leftrightarrow g'(\xi)-\lambda g(\xi)=0$

$\Leftrightarrow (e^{-\lambda\xi}g(\xi))'=0$.

因此，构造 $F(x)=e^{-\lambda x}g(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x)$

$F(0)=1\times(0-0)=0$.

$F(\frac{1}{2})=e^{-\frac{\lambda}{2}}(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}}>0$

$F(1)=e^{-\lambda}(0-1)=-e^{-\lambda}<0$.

故 $\exists c\in(\frac{1}{2},1)$ s.t. $F(c)=0$.

由 Rolle 定理. $\exists \xi \in (0,c)\subset(0,1)$

s.t. $F'(\xi)=0$. 即 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$ 证.

变式4. f 二阶可导. $f(a)=f(b)$. 则 $\forall x\in[a,b]$ $\exists \xi\in(a,b)$

s.t. $f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$

证明：变形 $\Leftrightarrow f''(\xi)-\underbrace{\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}}_{\text{取定}x\text{，这是个常数，记为}k}=0$.

i.e. $f''(\xi)-k=0$.

即找1个 $F(x)$ s.t. $F''(x)=f''(x)-k$. 对F用两次Rolle

故做2次不定积分！ $F'(x)=f'(x)-kx+C$.

构造 $F(x)=f(x)-\frac{k}{2}x^2+Cx$. C是待定常数.

解出 $C=k(a+b)$ 即可.

$$\begin{cases} F(a)=f(a)-\frac{k}{2}a^2+Ca \\ F(b)=f(b)-\frac{k}{2}b^2+Cb \\ F(x)=f(x)-\frac{k}{2}x^2+Cx. \end{cases}$$

只要找一个C s.t. $F(a)=F(b)=F(x)$

则由Rolle定理. $\exists x_1\in(a,x)$, $x_2\in(x,b)$

s.t. $F'(x_1)=0=F'(x_2)$

再由Rolle定理. $\exists \xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$

s.t. $F''(\xi)=0$. 即 $f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$

<中值定理的常见应用>

① 不定积分基本定理.

$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + C$.

证明: 设 $f(x_1) - g(x_1) \neq f(x_2) - g(x_2)$, $x_1 < x_2$.

则由 Lagrange 中值定理. $\exists \xi \in (x_1, x_2)$

s.t. $f'(\xi) - g'(\xi) \neq 0$ 矛盾 □.

② 证明是常函数.

f 可导. 则 $f(x) \equiv C \Leftrightarrow f'(x) \equiv 0$.

Eg. $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0$, $g(x) \neq 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ s.t. $f(x) = kg(x)$

证明: 上式即 $fg' - f'g = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{fg' - f'g}{g^2} = 0 \Leftrightarrow (f/g)' = 0 \Leftrightarrow f/g \equiv k$

$\Leftrightarrow f = kg$ □.

Rmk. 一般地, 在 ODE 中 亦可证明.

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \exists k_1, k_2, \cdots, k_n \text{ 不全为 } 0$$

s.t. $k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_n f_n \equiv 0$.

③ 至多几个根问题.

中心思想：$f(x)$ 有 n 个根，用 ~~n~~ k 次 Rolle 定理

知道 $f^{(k)}(x)$ 至少有 $n-k$ 个根.

Eg. 证明 $x^{12}+x^8-\cos x=0$ 只有 2 根.

证明：$f''(x)=132x^{10}+56x^6+\cos x>0$. 没有根.

因此 f 至多 2 根 □.

④ 至少几个根问题.

欲证 $f(x)$ 至少 k 个根.

只需找 $F(x)$ s.t. $F'(x)=f(x)$. 而 $F(x)$ 至少有 $k+1$ 个根.

Eg. 作业 4.1.6.

求证 $f(x)=C_1\cos x+\cdots+C_n\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 有根.

证明：做不定积分.

构造 $F(x)=C_1\sin x+\cdots+\frac{C_n}{n}\sin nx$

$F(0)=F(\pi)$ Rolle $\Rightarrow \exists \xi\in[0,\pi]$ s.t. $f(\xi)=0$ □