第十二章 广义积分

§12.1.3 练习题 学员: d39

1. 解答: 假设存在 $x_0 \in [0,+\infty), f(x_0) = A > 0$, 则 $\exists U(x_0;\delta), \forall x \in U(x_0;\delta), f(x) > \dfrac{A}{2}$, 于是

$$\int_0^{+\infty} f \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f > A\delta > 0$$

矛盾. 因此 $f \equiv 0$. □

2. 解答: 结论早在第十章练习题 10.1.3 第 3 题的注中给出. 下面来证明这些结论:

无穷限积分:

$f^2 \not\Rightarrow |f|$ 反例: $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛但 $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 发散.

$|f| \not\Rightarrow f^2$ 反例:

$$f(x) = \begin{cases} n^2, & n \leqslant x < n + \dfrac{1}{n^4} \\ 0, & n + \dfrac{1}{n^4} \leqslant x < n+1 \end{cases}$$

$\int_1^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 但 $\int_1^{N+1} f^2(x)\mathrm{d}x = N \to +\infty$ 发散.

无界积分:

$|f| \not\Rightarrow f^2$ 反例: $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛但 $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 发散.

$f^2 \Rightarrow f$ 证明: 若 $\int_a^b f^2$ 收敛, 则因为

$$\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b \frac{1+f^2}{2} = \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b |f|^2$$

由比较判别法知 $\int_a^b |f|$ 收敛, 当然 $\int_a^b f$ 也收敛. □

3. 解答:

充分性: 因 $f(0^+) = +\infty$, 故 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (0,\delta)$ 时 $f(x) > 0$. 故对 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性, 可用比较判别法进行判定. 下面证明当 $0 < a < \delta$ 时 $\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x$ 保持上有界.

事实上, 因为 $f(x)$ 在 $[a,1]$ 上连续, 所以 $\exists M > 0$ 使得 $f(x) \leqslant M, x \in [a,1]$. 因而 $N > M$ 时, $[a,1]$ 上恒有

$$f_N(x) = \min\{f(x), N\} = f(x)$$

从而

$$\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_a^1 f_N(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_N(x)\mathrm{d}x$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

令 $N \to +\infty$ 取极限, 得

$$\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 f_N(x)\mathrm{d}x < +\infty$$

故 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

必要性: 注意到 $f_N(x)$ 关于 N 递增, 且 $f_N(x) \leqslant f(x)$, 由单调有界原理, $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_0^1 f_N(x)\mathrm{d}x$ 存在. □

4. 解答: 由题意 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2$ 收敛, 换元可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x+a)$ 也收敛. 则因为

$$|f(x)f(x+a)| \leqslant \frac{1}{2}f^2(x) + \frac{1}{2}f^2(x+a)$$

由比较判别法命题得证. □

5. 解答:

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta [f(x+a)-f(x)]\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x+a)\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_{\alpha+a}^{\beta+a} f(t)\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha+a}^{\beta+a} f(x)\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_\beta^{\beta+a} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{\alpha+a} f(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_\beta^{\beta+a} [A+(f(x)-A)]\mathrm{d}x - \int_a^{\alpha+a} [B+(f(x)-B)]\mathrm{d}x\\
&= Aa - Ba + \int_\beta^{\beta+a}(f(x)-A)\mathrm{d}x - \int_a^{a+a}(f(x)-B)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

当 $\alpha \to -\infty, \beta \to +\infty$ 时, 易知后面两项趋于 0. 因此 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+a)-f(x)]\mathrm{d}x$ 收敛, 且其值为 $(A-B)a$. □

6. 解答: 注意 12.1.1 中的第 6 条定义. 这里由于 $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \geqslant \dfrac{1}{x}$, 由比较判别法 $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$ 发散, 因此 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$ 也发散, 不能用定积分中的偶倍奇零法则.

$$\begin{aligned}
P.V.\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\delta\to0^+}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_\delta^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}\right)\\
&= \lim_{\delta\to0^+} \ln\frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}+1}\left(\Big|_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} + \Big|_\delta^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

代入上下限的值可知主值为 0. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§12.2.3　练习题　学员: d39

1. 解答:

(1) 显然被积函数在 $[0,+\infty)$ 上恒正, 于是

$$\int_0^{+\infty} x\sin^4 x\mathrm{d}x \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+\pi/2} x\sin^4 x\mathrm{d}x \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+\pi/2}\frac{1}{16}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{48}\to+\infty$$

故原积分发散.

(2) 对 $\forall u>3$, 有 $\left|\int_3^u \sin x\mathrm{d}x\right| = |\cos u-\cos 3|\leqslant 2$, 当 $x\geqslant e^{e^2}$ 时, $\frac{\ln\ln x}{\ln x}$ 单调递减趋于 0. 于是由 Dirichlet 判别法可知积分 $\int_3^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$ 收敛. 另一方面

$$\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right| \geqslant \frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin^2 x = \frac{\ln\ln x}{2\ln x} - \frac{(\ln\ln x)\cos 2x}{2\ln x}$$

类似由 Dirichlet 判别法可知积分 $\int_3^{+\infty}\frac{(\ln\ln x)\cos 2x}{2\ln x}\mathrm{d}x$ 收敛, 而

$$\int_3^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\overset{x=e^t}{=\!=}\int_{e^3}^{+\infty}\frac{\ln t}{t}\cdot e^t\mathrm{d}t > \int_{e^3}^{+\infty}\ln t\mathrm{d}t$$

显然发散, 故原积分条件收敛.

(3) 取 $u(x)=\frac{1}{x}, v(x)=\sin(\sin x)e^{\cos x}$. 则 $u(x)$ 单调递减且趋于 0, 而 $v(x)$ 以 2π 为周期, 且容易验证 $v(2\pi-x)=-v(x)$, 即 $v(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 关于 $(\pi,0)$ 对称. 于是就有

$$\int_0^{2\pi} v(x)\mathrm{d}x = 0$$

对任意 $A>0$, 存在 $A'\in[0,2\pi]$ 使得 $A=A'+2k\pi$, 于是

$$\left|\int_0^A v(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{A'} v(x)\mathrm{d}x\right| < A'e$$

从而由 Dirichlet 判别法可知该积分收敛.

接下来考察积分 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{x}\sin(\sin x)e^{\cos x}\right|\mathrm{d}x$. 被积函数依旧以 2π 为周期. 设

$$\int_{2k\pi-2\pi}^{2k\pi}|v(x)|\,\mathrm{d}x = a>0, k=1,2,\cdots$$

由积分中值定理可知在 $[(2k-2)\pi,2\pi]$ 上存在 ξ 使得

$$\int_{(2k-2)\pi}^{2\pi}|u(x)v(x)|\mathrm{d}x = |u(\xi)|\int_{(2k-2)\pi}^{2\pi}|v(x)|\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2k\pi}a$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

对 $\forall A = A' + 2k\pi > 0$ 有

$$\int_0^A |u(x)v(x)|\mathrm{d}x \geqslant a \cdot \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} + \cdots + \frac{1}{2k\pi}\right)$$

令 $k \to +\infty$ 可知

$$\int_0^{+\infty} |u(x)v(x)|\mathrm{d}x \to +\infty$$

故原积分条件收敛.

(4) 分部积分可知

$$\int \ln\frac{x^2}{x^2-1}\mathrm{d}x = x\ln\frac{x^2}{x^2-1} + \ln(x-1) - \ln(x+1) + C$$

于是 $\int_1^{+\infty} \ln\frac{x^2}{x^2-1}\mathrm{d}x = \ln 4$. 显然绝对收敛.

(5) 由于

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{t}\ln(\cos t + \sin t) = \lim_{t\to0^+} \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} = 1$$

故原积分发散.(被积函数恒正)

(6) 因为

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) = 2$$

故 0 不是瑕点, 原积分仅有瑕点 1. 又因为

$$\lim_{x\to1^-} \frac{\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to1^-} \frac{2/(1-x^2)}{1/(x-1)} = -1$$

直接计算知 $\int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x$ 收敛, 由比较判别法可知原积分绝对收敛.(被积函数恒正)

(7) 因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right] = \lim_{t\to0^+} \frac{t - \sqrt{\ln(1+t^2)}}{t^3}$$

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t^4 + o(t^4)}}{t^3} = \lim_{t\to0^+} \frac{1 - \left[1 - \frac{1}{4}t^2 + o(t^2)\right]}{t^2} = \frac{1}{4}$$

所以 $\int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]\mathrm{d}x$ 收敛且绝对收敛.

计算知 $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{1/\sqrt{x}} = 1$. 从而 $\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]\mathrm{d}x$ 收敛且绝对收

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

敛. 综上可知 $\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(8) 易知 0 不是瑕点. 令 $g(x)=x+\cos x$, 于是 $g'(x)=1-\sin x\geqslant 0$, 即 $g(x)$ 单调递增, 于是 $\frac{1}{\sqrt{x+\cos x}}$ 单调递减趋于 0. 而对 $\forall u>0$, $\left|\int_0^u \sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos u-\cos 0|\leqslant 2$. 故可由 Dirichlet 判别法可知积分收敛. 再考察积分 $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x+\cos x}}\mathrm{d}x$. 而由于当 $x\to+\infty$ 时 $\frac{|\sin x|}{\sqrt{x+\cos x}}\sim\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}$, 而由例题 12.2.3 的结论知 $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 发散. 综上可知原积分条件收敛. □

2. 解答:

(1) 因为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-p}x\cos^{-q}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{-p+1}{2},\frac{-q+1}{2}\right)$$

由 Beta 函数性质可知当 $\frac{-p+1}{2}>0,\frac{-q+1}{2}>0$ 即 $p<1,q<1$ 时, 原积分绝对收敛.

注: $\Gamma(s)$ 的定义域是 $s>0$, $B(p,q)$ 的定义域是 $p,q>0$.

(2) 由于 $p>0$, 故奇点只有 $+\infty$. 若 $0<p\leqslant 1$ 则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\cos x|}{1+x^p}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^p}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2\left(1+x^p\right)}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^p}\mathrm{d}x$$

后一式由 Dirichlet 判别法知收敛, 前一式显然发散, 故原积分不是绝对收敛的.

另一方面, 对任意 $u>0$, $\left|\int_0^u\cos x\mathrm{d}x\right|$ 有界, 因此由 Dirichlet 判别法知原积分条件收敛.

若 $p>1$, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\cos x|}{1+x^p}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x$$

由比较判别法知原积分绝对收敛.

(3)0, 1 均可能是瑕点, 将原来的积分区间分段

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1+\int_1^2+\int_2^{+\infty}\right)\frac{\sin x}{x}|\ln x|^p\,\mathrm{d}x=I_1+I_2+I_3+I_4$$

1° 利用 L'hospital 法则可知对任意 $p\in\mathbb{R}$ 都有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}|\ln x|^p}{1/\sqrt{x}}=0$$

而 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛, 从而 I_1 绝对收敛.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

2° 对于 I_2, I_3, 考虑当 $x \to 1$ 时, 有

$$|\ln x|^p = |\ln[1+(x-1)]|^p \sim |x-1|^p$$

于是当 $p > -1$ 时 I_2, I_3 绝对收敛, 当 $p \leqslant -1$ 时 I_2, I_3 发散.

3° 对任意 $p \in \mathbb{R}$ 都有 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|\ln x|^p}{x} = 0$, 并且对任意 $u > 2$ 有 $\left|\int_2^u \sin x\mathrm{d}x\right| = |\cos u - \cos 2|$ $\leqslant 2$. 根据 Dirichlet 判别法可知 I_4 收敛.

另一方面, 当 $p \geqslant -1$ 时

$$\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \ln^p x \geqslant \int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \ln^p x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} \ln^p x$$

前一项

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x}\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{+\infty} t^p \mathrm{d}t$$

发散, 后一项类似上述讨论知收敛, 故原积分非绝对收敛.

当 $p < -1$ 时

$$\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \ln^p x\mathrm{d}x \leqslant \int_2^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x}\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{+\infty} t^p \mathrm{d}t$$

收敛. 因此当 $p < -1$ 时 I_4 绝对收敛, 当 $p \geqslant -1$ 时 I_4 非绝对收敛.

综上可知, 当 $p > -1$ 时, 原积分条件收敛, 当 $p \leqslant -1$ 时原积分发散.

(4) 在 $+\infty$ 处, $\dfrac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \dfrac{\ln x}{x^p}$, 而

$$\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \ln x \mathrm{d}\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}} \\
&= \frac{-1}{(p-1)x^{p-1}} \ln x\Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{p-1}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{p-1} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \frac{-1}{(p-1)x^{p-1}}\Big|_1^{+\infty}
\end{aligned}$$

要使积分存在则要 $p > 1$.

另一方面, 在 0 处, $\dfrac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \dfrac{1}{x^{p-1}}$, 要使原积分收敛则要 $p < 2$.

综上可知, 当 $1 < p < 2$ 时原积分绝对收敛, 其余情况均发散.

(5) 显然 0 不是瑕点. 令 $t = x^2$, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}\mathrm{d}t$$

对任意 $u > 0$, $\left|\int_0^u \sin x\mathrm{d}x\right| = |\cos u - \cos 0| \leqslant 2$, 而 $\dfrac{1}{\sqrt{t}\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}$ 单调递减趋于 0. 根据

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

Dirichlet 判别法可知原积分收敛.

又

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt{t}\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}\mathrm{d}t$$

前一项在 0 处的收敛性与 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ 一致, 是收敛的; 在 $+\infty$ 处的收敛性与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}}\mathrm{d}t$ 一致, 当 $-\frac{p+1}{2}<-1$ 即 $p\leqslant 1$ 时发散. 而后一项由 Dirichlet 判别法知收敛, 故原积分不是绝对收敛的.

如果 $p>1$, 那么

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}}\mathrm{d}t$$

由比较判别法知原积分绝对收敛.

(6) 先设 $q\geqslant 0$. 记

$$\left(\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right)\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

1° 对于 I_1, 因当 $x\to 0^+$ 时

$$\frac{x^p\sin x}{1+x^q}=\frac{x^{p+1}}{1+x^q}\cdot\frac{\sin x}{x}\sim x^{p+1}$$

当 $p>-2$ 时 I_1 绝对收敛, 当 $p\leqslant -2$ 时 I_1 发散.

2° 对于 I_2, 有

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}\mathrm{d}x\sim\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^{q-p}}\mathrm{d}x$$

由例题 12.2.3 的讨论可知只有当 $q-p>1$ 时 I_2 绝对收敛.

而对于条件敛散性, 如果 $q-p>0$, 那么由 Dirichlet 判别法知收敛, 否则当 $k\to+\infty$ 时

$$\int_{k\pi+\frac{\pi}{6}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_{k\pi+\frac{\pi}{6}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x^p}{1+x^q}\mathrm{d}x\not\to 0$$

由 Cauchy 准则知当 $q-p\leqslant 0$ 时原积分发散.

综上可知只有当 $q-p>1$ 时原积分绝对收敛; $-2<p<q\leqslant p+1$ 条件收敛. 其余情况均发散.

对于 $q<0$ 的情况, 在被积函数的分子分母上同时乘 x^{-q} 套用结论即可.

(7) 先记

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x=\left(\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right)\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

1° 对于 I_1, 在 0 处 $\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\sim\frac{2}{x^{p-1}}$ 因此 $p<2$ 时 I_1 绝对收敛, 否则发散.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

2° 对于 I_2, 当 $1<p<2$ 时, 有

$$\left|\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\right| \leqslant \frac{e}{x^p}$$

由比较判别法知 I_2 绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时, 有

$$\left|\int_0^u e^{\sin x}\sin 2x\mathrm{d}x\right| = \left|2e^{\sin x}(\sin x-1)\right| \leqslant 4e$$

由 Dirichlet 判别法可知 I_2 收敛. 令 $|e^{\sin x}\sin 2x| = g(x)$, 则有 $g(x)=g(x+2\pi)$. 和第 1 题第 (3) 问类似做法可证 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$ 发散, 从而 I_2 条件收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时和第 (6) 问类似做法, 由 Cauchy 收敛准则可知发散.

综上所述, 原积分当 $1<p<2$ 时绝对收敛, 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛, 当 $p\leqslant 0$ 时发散.

(8) 显然被积函数非负.

当 $x\to e^+$ 时有

$$\ln\ln x \sim \ln x - 1 = \ln\frac{x}{e} \sim \frac{x-e}{e}$$

因此

$$\frac{1}{(x-e)^p(\ln\ln x)^q} \sim \frac{e^q}{(x-e)^{p+q}}$$

可见要使 $\int_e^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-e)^p(\ln\ln x)^q}$ 收敛则只有 $p+q<1$, 反之发散.

当 $x\to+\infty$ 时

1° 如果 $p>1$

(i) 当 $q=0$ 时显然 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-e)^p}$ 收敛.

(ii) 当 $q>0$ 时, $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-e)^p}$ 收敛且 $\frac{1}{(\ln\ln x)^q}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-e)^p(\ln\ln x)^q}$ 收敛.

(iii) 当 $q<0$ 时, 令 x 充分大可使 $(\ln\ln x)^{-q}<x^{\frac{p-1}{2}}$, 从而

$$\frac{(\ln\ln x)^{-q}}{(x-e)^p} < \frac{1}{(x-e)^{\frac{p+1}{2}}}$$

由比较判别法知 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-e)^p(\ln\ln x)^q}$ 收敛.

2° 如果 $p=1$, 则

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-e)(\ln\ln x)^p} \sim \int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln\ln x)^p} = \int_{e^3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^q}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(i) 如果 $q=0$, 显然发散.

(ii) 如果 $q<0$, 则 $(\ln t)^{-q}\to+\infty$, 也显然发散.

(iii) 如果 $q>0$, 则因为 $\dfrac{t}{(\ln t)^q}\to+\infty$(反复 L'hospital 法则即知), 由比较判别法知发散.

3° 如果 $p<1$, 则因为 $p=1$ 时已经发散, 因此也是发散的.

综上可知, 当且仅当 $p+q<1$ 且 $p>1$ 时原积分收敛. □

3. 解答: 所有奇点为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\pm\infty$. 对于每个 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 处, 都有

$$\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}\sim\frac{1}{|x-a_k|^{p_k}}$$

若要原积分收敛, 则只有 $p_k<1$.

而对于 $\pm\infty$ 处, 设 $M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}+1$, 原积分的敛散性与 $\displaystyle\int_M^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\sum\limits_{k=1}^n p_k}}$ 一致,

要使原积分收敛, 则只有 $\displaystyle\sum_{k=1}^n p_k>1$.

综上可知只有当 $p_1<1,p_2<1,\cdots,p_n<1$ 且 $\displaystyle\sum_{k=1}^n p_k>1$ 时原积分收敛且绝对收敛. □

4. 解答: 直接计算可知

$$\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]=x\ln\left[1+\frac{1}{x}\right]\Bigg|_0^{+\infty}=1-0=1$$

因此原积分是收敛的. 并且当 $x>0$ 时, 容易验证不等式

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}$$

故原积分也是绝对收敛的. □

5. 解答: 考虑

$$\begin{aligned}u_k&=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^4x}\geqslant(k-1)\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+k^4\pi^4\sin^2x}\\&=2(k-1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+k^4\pi^4\sin^2x}\geqslant2(k-1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+k^4\pi^4x^2}\\&=\frac{2(k-1)\pi}{k^2\pi^2}\int_0^{k^2\pi^2/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\to\frac{2(k-1)}{k^2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\sim\frac{1}{k}\end{aligned}$$

而调和级数发散, 故原积分发散. □

6. 解答: 当 $x>0$ 时, 奇点为 0 和 $+\infty$. 在 0 处, $F(x)$ 与 $\displaystyle\int_0^1 t^{-2x}\mathrm{d}t$ 敛散性一致, 则需要 $x<\dfrac{1}{2}$. 在 $+\infty$ 处, $F(a)$ 与 $\displaystyle\int_1^{+\infty}t^{2x}\mathrm{d}t$ 敛散性一致, 则需要 $x<-\dfrac{1}{2}$. 因此 x 无解.

当 $x<0$ 时, 设 $y=-x>0$, 则 $F(y)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2y}}{|t^4-1|^y}\mathrm{d}t$, 奇点为 1 和 $+\infty$. 在 1 处

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{t^{2y}}{(t^4-1)^y}=\frac{t^{2y}}{(t^2+1)^y(t+1)^y(t-1)^y}\sim(t-1)^{-y}$$

即 $F(y)$ 与 $\int_0^1(t-1)^{-y}\mathrm{d}t$ 敛散性一致, 则需要 $y<1$.

而在 $+\infty$ 处

$$\frac{t^{2y}}{(t^4-1)^y}=\frac{t^{2y}}{(t^2+1)^y(t+1)^y(t-1)^y}\sim\frac{t^{2y}}{t^{2y}\cdot t^y\cdot t^y}=t^{-2y}$$

即 $F(y)$ 与 $\int_1^{+\infty}t^{-2y}\mathrm{d}t$ 敛散性一致, 则需要 $y>\dfrac{1}{2}$.

综上可知, $F(x)$ 的定义域为 $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$. □

7. 解答: 因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x^p}\cdot x^{p-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

故 $\int_0^1\dfrac{f(x)-f(0)}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性与 $\int_0^1x^{1-p}\mathrm{d}x$ 一致, 结论是显然的. □

8. 解答:

(1) 因为 $\int_a^{+\infty}f$ 条件收敛, 所以 $\int_a^{+\infty}|f|$ 发散, 自然 $\int_a^{+\infty}(|f|\pm f)$ 发散.

(2) 首先有

$$\frac{\int_a^x(|f|+f)}{\int_a^x(|f|-f)}-1=\frac{2\int_a^xf}{\int_a^x(|f|-f)}$$

由题设及第 (1) 问可知当 $x\to+\infty$ 时上式分子是有限数, 分母无界, 故上式极限为 0. □

9. 解答: 分部积分可知

$$\int_a^{+\infty}f'(x)\sin^2x\mathrm{d}x=\sin^2xf(x)\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}f(x)\sin2x\mathrm{d}x$$

因为 $f(+\infty)=0$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin^2xf(x)=0$. 又 f 单调趋于 0, 对任意 $u>a$, $\int_a^u\sin2x\mathrm{d}x$ 有界, 由 Dirichlet 判别法 $\int_a^{+\infty}f(x)\sin2x\mathrm{d}x$ 收敛. 于是 $\int_a^{+\infty}f'(x)\sin^2x\mathrm{d}x$ 也收敛. □

10. 解答: 显然 f 单调递增趋于 0, 而对 $\forall u>a$,

$$\left|\int_a^ug'(x)\mathrm{d}x\right|=|g(u)-g(a)|$$

有界, 故由 Dirichlet 判别法 $\int_a^{+\infty}f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ 收敛. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§12.3.3　练习题　学员: d39

1. 解答: 本题意在说明如果函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上非负, 关于 $y=x$ 对称且 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并设 $f(x)$ 与 $y=x$ 的交点是 (a,a), 则

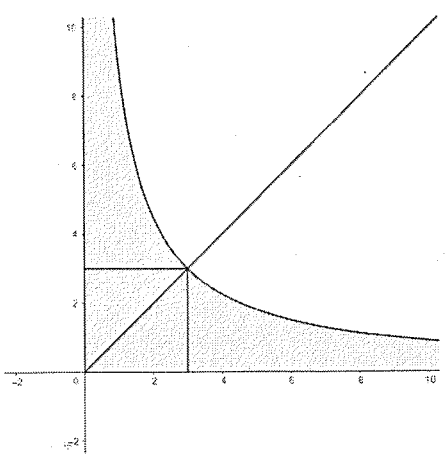
$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + a^2$$

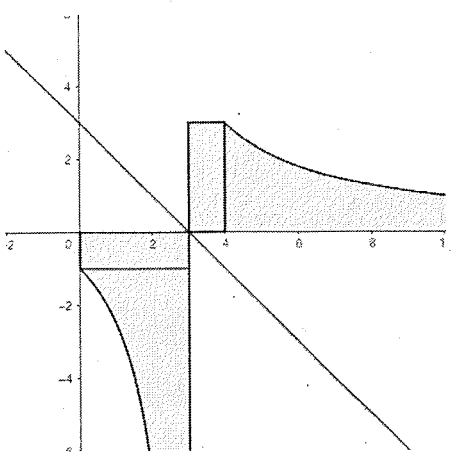
(对偶地有 $f(x)$ 关于 $y=-x$ 对称的情形)
又如果 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有瑕点 a 且收敛, $f(x)$ 在 $[0,a)\cup(a,+\infty)$ 上关于 $y=-x+a$ 对称, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

(对偶地有 $f(x)$ 关于 $y=x-a$ 对称的情形)
下面以第一种情形为例进行证明, 其余类似.
由于 $f(x)$ 关于 $y=x$ 对称, 因此 $f^{-1}=f$. 利用第十一章第二组参考题第 6 题的 (1) 式, 可得 (注意 $f(a)=a$)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f^{-1}(y)\mathrm{d}y + \int_a^{+\infty} f^{-1}y\mathrm{d}y\\ &= 2\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + a^2\end{aligned}$$





注: 如上图所示, 从几何上这些结论是显然的. □

2. 解答:

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-1)^k e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-(k+1)\pi} + \frac{1}{2}e^{-k\pi}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$(这里需要先说明由 Dirichlet 判别法积分收敛);

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^{x+1}+e^{3-x}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}e^x}{e^{2x+1}+e^3}=\int_e^{+\infty}\frac{e^{-1}\mathrm{d}t}{t^2+e^2}=\frac{1}{e}\cdot\left(\frac{1}{e}\arctan\frac{t}{e}\right)\Big|_e^{+\infty}=\frac{1}{e^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4e^2}$;

(3) $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\xlongequal{x=\frac{b+a}{2}+t}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}+t\right)\left(\frac{b-a}{2}-t\right)}}=\arcsin\frac{2t}{b-a}\Big|_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}=\pi$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t\mathrm{d}t\xlongequal{\text{Wallis}}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$;

(5) 由练习题 10.4.6 第 7 题的结论, $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x^{-1})^m\mathrm{d}x=\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$;

(6) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x\xlongequal{x=1/t}-\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(t-\frac{1}{t}\right)}{t}\mathrm{d}t\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=0$;

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)(4+x^2)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{3}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{4+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{4+x^2}\mathrm{d}x\right)=-\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\ln 2x}{4+4x^2}\mathrm{d}(2x)=-\frac{1}{6}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x+\ln 2}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln 2}{6}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$
$=-\dfrac{\pi\ln 2}{12}$(这里利用了例题 12.3.1 的结论);

(8) 记 $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$, 则 $f(0^+)=0, f(0^-)=1$, $\displaystyle\int_{-1}^1 f'(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$
$=f(1)-f(0^+)+f(0^-)-f(-1)=\dfrac{2}{3}$. □

3. 解答:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\tan x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\mathrm{d}x\xlongequal{x=\pi/2-t}0$;

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\cos x}\cos x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2$;

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x=\arcsin x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2$;

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\cot x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}x\mathrm{d}\ln\sin x=x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\ln\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$(利用练习题 10.4.6 第 5 题 (1) 的结论);

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{x\cdot 2\sin(x/2)\cos(x/2)}{2\sin^2(x/2)}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x\cot(x/2)\mathrm{d}x\xlongequal{x=2t}4\int_0^{\pi/2}t\cot t\mathrm{d}t$
$=2\pi\ln 2$(用 (4) 的结论);

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=-\ln\sin t}-\int_0^{\pi/2}\frac{\ln\sin t}{\sqrt{\sin^{-2}t-1}}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=-\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\ln 2$;

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln|\sin^2x-a^2|\mathrm{d}x\xlongequal{a=\sin\theta}\int_0^{\pi/2}\ln|\sin^2x-\sin^2\theta|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\ln|\sin(x-\theta)\sin(x+\theta)|$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{\pi/2}\ln\sin(x-\theta)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\theta}\ln\sin(\theta-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi/2}\ln\sin(x+\theta)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi/2-\theta}\ln\sin x\mathrm{d}x+$$
$$\int_{0}^{\theta}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_{\theta}^{\pi/2+\theta}\ln\sin x\mathrm{d}x=\left(\int_{\frac{\pi}{2}+\theta}^{\pi}+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta}+\int_{0}^{\theta}\right)\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x=$$
$$2\int_{0}^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\pi\ln 2.$$

注: 本题也可以利用含参量积分的方法, 将积分视为关于 a 的函数 $I(a)$, 然后证明 $I'(a)=0$, 于是 $I(a)=I(0)=-\pi\ln 2$. □

4. 解答:

$$(1)\int_{0}^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a}(0-\arctan(+\infty))=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a};$$

$$(2)\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a}\left(e^{-0}-e^{-\infty}\right)=\ln\frac{b}{a};$$

$$(3)\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x=\cos 0\cdot\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a};$$

$$(4)\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(a-b)x-\cos(a+b)x}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{a+b}{a-b};$$

$$(5)\int_{0}^{1}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}\mathrm{d}x\overset{x=e^{t}}{=\!=}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}\mathrm{d}t\overset{t=-x}{=\!=}-\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{a}{b};$$

$$(6)\int_{0}^{+\infty}\frac{b\sin ax-a\sin bx}{x^{2}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin ax/ax-\sin bx/bx}{abx}\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a}.$$ □

5. 解答:

$$(1)\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^{2}x}{x^{2}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\sin^{2}x\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=\int_{0}^{+\infty}2\frac{\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}(2x)=\frac{\pi}{2};$$

$$(2)\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^{4}x}{x^{2}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^{2}x(1-\cos^{2}x)}{x^{2}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^{2}x}{x^{2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^{2}2x}{(2x)^{2}}\mathrm{d}(2x)$$
$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^{2}x}{x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4};$$

$$(3)\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^{4}x}{x^{4}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int_{0}^{+\infty}\sin^{4}x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^{3}}\right)=-\frac{1}{3}\left(-\int_{0}^{+\infty}\frac{4\sin^{3}x\cos x}{x^{3}}\mathrm{d}x\right)=$$
$$-\frac{1}{3}\int_{0}^{+\infty}\sin^{2}x\sin 2x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^{2}}\right)=-\frac{1}{3}\left(-\int_{0}^{+\infty}\frac{2\sin^{2}x\cos 2x+\sin^{2}2x}{x^{2}}\right)=$$
$$\frac{1}{3}\left[\int_{0}^{+\infty}\frac{2\sin^{2}x-4\sin^{4}x}{x^{2}}\mathrm{d}x+2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^{2}2x}{(2x)^{2}}\mathrm{d}(2x)\right]=\frac{1}{3}\left[2\cdot\frac{\pi}{2}-4\cdot\frac{\pi}{4}+\pi\right]=\frac{\pi}{3};$$

$$(4)\int_{0}^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^{3}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}(x-\sin x)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(-\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{-x^{2}}\mathrm{d}x\right)=$$
$$\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{2\sin^{2}(x/2)}{x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^{2}(x/2)}{(x/2)^{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\pi}{4};$$

$$(5)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x-\pi)}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{\pi}\left(\frac{1}{x-\pi}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\mathrm{d}(x-\pi)-$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)=-2;$$

$$(6)\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}\sqrt{t}=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{2t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$ □

6. 解答:

$$(1)\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{(x^2+1/2)^2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{-2x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+1/2}\right)=\frac{e^{-x^2}}{(-2x)(x^2+1/2)}\Big|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{e^{-x^2}}{(-2x)(x^2+1/2)}\Big|_{0}^{+\infty}+\frac{e^{-x^2}}{x}\Big|_{0}^{+\infty}+2\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=e^{-x^2}\cdot\frac{x}{x^2+1/2}\Big|_{0}^{+\infty}+\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi};$$

$$(2)\int_{0}^{+\infty}e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}}\mathrm{d}x=e^{2ab}\int_{0}^{+\infty}e^{-\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{e^{2ab}}{a}\int_{0}^{+\infty}e^{-(t^2+4ab)}\mathrm{d}t=\frac{e^{-2ab}}{a}\int_{0}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$=\frac{e^{-2ab}}{2a}\sqrt{\pi}$.(这里利用了下一题的结论) □

7. 解答: 令 $ax-\frac{b}{x}=t$, 则有 $ax+\frac{b}{x}=\sqrt{t^2+4ab}$, 于是

$$x=\frac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab}),\mathrm{d}x=\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t$$

$$I=\int_{0}^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{+\infty}\right)f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t$$

右边第一个积分里, 令 $t=-u$,

$$I=\frac{1}{2a}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\sqrt{u^2+4ab})\frac{\sqrt{u^2+4ab}-u}{\sqrt{u^2+4ab}}\mathrm{d}u+\int_{0}^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\right]$$

两积分合并可得

$$I=\frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t$$

证毕. □

§12.4.2 练习题 学员: d39

1. 解答: 因为 $\int_{a}^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x=f(+\infty)-f(a)$ 存在, 因此 $f(+\infty)$ 存在, 设为 A. 如果 $A\neq 0$ 不妨设 $A>0$, 则存在 $M>a$, 在 $[M,+\infty)$ 上恒有 $f(x)>\frac{A}{2}$, 而 $\int_{M}^{+\infty}\frac{A}{2}\mathrm{d}x$ 发散. 从而由比较判别法 $\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 与题设矛盾. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

注: 其他证法参见裴礼文 P416 例 4.5.25. □

2. 解答: 只要证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 之后便归结于命题 12.4.1 了.

设 $|f'(x)|<M$. 事实上, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$, 任意 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 x_1 与 x_2, 使得

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||x_1-x_2|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. □

3. 解答: 取 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$, $f(x)$ 单调且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ 发散. □

4. 解答: 类似例题 12.4.2, 不妨设 $xf(x)$ 单调减少非负. 因 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 由 Cauchy 准则, $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>\max\{a,1\}$, $\forall A_1,A_2>M$, 有

$$\int_{A_1}^{A_2}f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$$

于是可取 $A_1=\sqrt{x}, A_2=x$, 当 $x>M$ 时就有

$$0\leqslant xf(x)\ln x=2xf(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant 2\int_{\sqrt{x}}^{x}tf(t)\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t<2\varepsilon$$

此即 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)\ln x=0$. □

5. 解答: 由于 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 有两种情形:

(1) 存在数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $f(x_n)=0$. 在 $[x_n,x_{n+1}]$ 上用 Rolle 中值定理, 则存在 $\xi_n\in[x_n,x_{n+1}]$, $\xi_n\to+\infty$, $f'(\xi_n)=0$.

(2) 不满足 (1), 那么必然存在 M_2, 在 $[M_1,+\infty)$ 上 f 不变号. 不妨设 f 恒正, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $x_n\to+\infty$, $f(x_n)<\varepsilon$.(否则存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $M_2>M_1$, 在 $[M_2,+\infty)$ 上恒有 $f(x)\geqslant\varepsilon_0$, 由比较判别法可推 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 矛盾) 因为 $x_n\to+\infty$, 故可挑选子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $x_{n_{k+1}}-x_{n_k}>1$, 于是由 Lagrange 中值定理存在 $\xi_{n_k}\in(x_{n_k},x_{n_{k+1}})$ 使得

$$|f'(\xi_{n_k})|=\left|\frac{f(x_{n_{k+1}})-f(x_{n_k})}{x_{n_{k+1}}-x_{n_k}}\right|<2\varepsilon$$

所以 $\{\xi_{n_k}\}$ 满足 $\xi_{n_k}\to+\infty$, $\lim\limits_{k\to+\infty}f'(\xi_{n_k})=0$.

注: 可直接用下一题第 (2) 问的结论来说明存在 $x_n\to+\infty, f(x_n)\to 0$. □

6. 解答:

(1) 显然 (2)(3) 蕴涵了 (1).

(2) 因为 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 由 Cauchy 收敛准则, 对 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$, 存在 $M>a$, $\forall A_n>M$ 有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$0 \leqslant \frac{x_n}{2}|f(x_n)| \leqslant A_n|f(x_n)| = \left|\int_{An}^{2A_n} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{n}, x_n \in [A_n, 2A_n]$$

令 $n \to \infty$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n f(x_n) = 0$.

(3) 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛时, 取

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}, \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}\right) \\ -1, x \in \left[\sum\limits_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k}, \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\right) \end{cases}, n = 1, 2, \cdots$$

则 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 由 Leibniz 判别法收敛, 但是对任意满足 $x_n \to +\infty$ 的数列 $\{x_n\}$, 都有 $x_n f(x_n) \not\to 0$.

而当 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时, 结论仍成立. 考虑 $S_n = \{|xf(x)| : x \geqslant n\}, \varepsilon_n = \inf S_n$. 显然 $S_1 \supset S_2 \supset \cdots$, 所以 ε_n 随 n 递增. 如果存在 $\varepsilon_n \neq 0$, 那么在 $[n, +\infty)$ 上, 有 $|xf| \geqslant \varepsilon_n$, 从而 $|f| \geqslant \frac{\varepsilon_n}{x}$, 由比较判别法 $\int_a^{+\infty} |f|$ 发散, 矛盾. 故 $\varepsilon_n = 0$, 也就是说, 存在数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \to +\infty, x_n f(x_n) \to 0$. □

§12.5.2 参考题 学员: d39

第一组参考题 学员: d39

1. 解答: 对任意实数 α, 我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^\alpha t} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^\alpha t} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^\alpha(\pi/2-t)}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^\alpha t} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^\alpha t \mathrm{d}t}{1+\tan^\alpha t} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

因此 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^6)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{100} x} = \frac{\pi}{4}$. □

2. 解答:

$$(1)\frac{1}{29} = \int_1^{+\infty} \frac{x^{30}}{x^{60}}\mathrm{d}x < \int_1^{+\infty} \frac{x^{30}+1}{x^{60}+1}\mathrm{d}x < \int_1^{+\infty} \frac{x^{30}+1}{x^{60}}\mathrm{d}x = \frac{1}{29} + \frac{1}{59};$$

$$(2)\frac{\pi}{10} = \frac{1}{5}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} < \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(4+\sqrt{\sin x})\sqrt{4-x^2}} < \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{8};$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(3)$\dfrac{1}{30}=\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{4x^3+3x^2+2x+1}{(x^4+x^3+x^2+x)^2}\mathrm{d}x<\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}\mathrm{d}x<\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}}{x^5}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{20}$;

(4)$0.0099<\dfrac{1}{101}=\dfrac{100}{101}e^{100}\cdot\dfrac{e^{-100}}{100}=\dfrac{100}{101}e^{100}\displaystyle\int_{100}^{+\infty}\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}\mathrm{d}x<e^{100}\int_{100}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x<\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{100}\mathrm{d}x=0.01.$ □

3. 解答: 任给 $\varepsilon>0$, 由 Cauchy 准则, 可取充分大的正数 X 使得

$$\max\left\{\int_{-\infty}^{-X+1}|f(x)|^p\mathrm{d}x,\int_{X-1}^{+\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}<\frac{\varepsilon}{2^{p+2}}$$

对任意的 $0<h<1$, 由 Minkowski 不等式 (命题 11.2.5) 我们均有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{-X}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_X^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x\\ \leqslant&\left\{\left[\int_{-\infty}^{X}|f(x+h)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}+\left[\int_{-\infty}^{X}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\right\}^p\\ &+\left\{\left[\int_{X}^{+\infty}|f(x+h)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}+\left[\int_{X}^{+\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\right\}^p\\ \leqslant&2^p\left\{\int_{-\infty}^{-X+1}|f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{X-1}^{+\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}<2^p\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2^{p+2}}+\frac{\varepsilon}{2^{p+2}}\right)=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

另一方面, 由题意 $f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上可积, 故可设 $|f(x)|\leqslant M, x\in[-X,X]$. 利用第十章第一组参考题第 6 题的结论可知当 $h\to0$ 时

$$\int_{-X}^{X}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2(2M)^{p-1}}$$

于是

$$\int_{-X}^{X}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant(2M)^{p-1}\int_{-X}^{X}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$$

合并区间即知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因此命题成立. □

4. 解答: 记 $q=\dfrac{p}{p-1}$, 则有 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 由 Hölder 不等式, 我们有

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

故 $I(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有定义且有界. 再使用 Hölder 不等式, 还可得到

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$|I(t+\Delta t)-I(t)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+t+\Delta t)-f(x+t))g(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+\Delta t)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

由上一题的结论可知 $|I(t+\Delta t)-I(t)|\to 0(\Delta t\to 0)$, 即 $I(t)$ 连续. □

5. 解答: 由题设条件易知 $f(x)\geqslant 0, f'(x)\leqslant 0$.

必要性: 设 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 由例题 12.4.2 的结论, 知 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$. 故

$$\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=-af(a)-\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

从而 $\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

充分性: 设 $\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则由于

$$-\int_{x_1}^{x_2}xf'(x)\mathrm{d}x=-\eta\int_{x_1}^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x=\eta\left(f\left(X_1\right)-f\left(X_2\right)\right)\geqslant X_1\left(f\left(X_1\right)-f\left(X_2\right)\right)$$

这里 $\eta\in[X_1,X_2]$. 固定 X_1, 令 $X_2\to+\infty$, 得 $-\int_{X_1}^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x\geqslant X_1f(X_1)\geqslant 0$. 再令 $X_1\to+\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$. 所以我们有

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x=-af(a)-\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$$

所以 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0$. □

6. 解答: 由于当 $p<-1$ 时, $f(x)<x^{\frac{p-1}{2}}$ 对充分大的 x 成立, 由 $\int_1^{+\infty}x^{\frac{p-1}{2}}\mathrm{d}x$ 收敛可知 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛; 而当 $p>-1$ 时, $f(x)>x^{\frac{p-1}{2}}$ 对充分大的 x 成立, 由 $\int_1^{+\infty}x^{\frac{p-1}{2}}\mathrm{d}x$ 发散可知 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散. □

7. 解答:

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right)=\gamma$$

证毕. □

8. 解答: 记积分内的函数为 $f(x)$. 易知当 $x\to 0^+$ 时, 有

$$0<f(x)+1=\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left[\frac{1}{3!}x^2+o(x^2)\right]^{-\frac{1}{3}}\sim x^{-\frac{2}{3}}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故 $\int_0^1 (f(x)+1)\mathrm{d}x$ 收敛且绝对收敛, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 亦然.

当 $x\to+\infty$ 时, 由 $(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 公式可知

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin x}{x}+\frac{2}{9}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

故由 $\int_1^{+\infty}\left[\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\mathrm{d}x$ 绝对收敛知 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性和绝对敛散性. 由例题 12.2.3 即知 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛但不绝对收敛.

综上可知 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛但不绝对收敛. □

9. 解答:

(1) 显然 $+\infty$ 是唯一奇点, 故可将积分下限改为任意正数来讨论.

$1^\circ q-p\leqslant 1$ 时: 由于

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{-p}+x^{q-p}}\mathrm{d}x$$

故当 $q-p\leqslant 1$ 时, 该积分发散.

$2^\circ q-p>1$ 时:

若 $r<1$, 此时有

$$\begin{aligned}\int_\pi^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x=2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\\&\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q(2/\pi)^r x^r}\mathrm{d}x=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q x^r}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+(k\pi)^q x^r}&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left[(k\pi)^{\frac{q}{r}}x\right]^r}=\frac{1}{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\int_0^{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^r}\\&\leqslant\frac{1}{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\int_0^{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\frac{\mathrm{d}x}{x^r}=\frac{1}{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\cdot\frac{(k\pi)^{\frac{q(1-r)}{r}}}{1-r}=\frac{1}{1-r}\cdot\frac{1}{(k\pi)^q}\end{aligned}$$

故

$$\int_\pi^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{1-r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k+1)\pi]^p}{(k\pi)^q}$$

从而原积分绝对收敛.

若 $r=1$, 此时仍有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\leqslant\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q x^r}\mathrm{d}x$$

且

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{1+(k\pi)^q x^r}\mathrm{d}x&=\frac{1}{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\int_0^{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\frac{1}{1+x^r}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{(k\pi)^q}\int_0^{(k\pi)^q}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{(k\pi)^q}\ln\left(1+(k\pi)^q\right)\end{aligned}$$

故我们有

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\leqslant\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q x^r}\mathrm{d}x=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k+1)\pi]^p}{(k\pi)^q}\ln\left(1+(k\pi)^q\right)$$

从而原积分绝对收敛.

若 $r>1$, 此时仍有

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\leqslant\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q x^r}\mathrm{d}x$$

且有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{1+(k\pi)^q x^r}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{1}{1+\left[(k\pi)^{\frac{q}{r}}x\right]^r}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\int_0^{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\frac{1}{1+x^r}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^r}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

设 $C_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^r}$, $C_2=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^r}$, 则

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\leqslant\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q x^r}\mathrm{d}x\leqslant\frac{C_1\pi[(k+1)\pi]^p}{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}$$

从而当 $\dfrac{q}{p+1}>r$ 时原积分绝对收敛. 而当 $\dfrac{q}{p+1}\leqslant r$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\pi}^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\\\geqslant&\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{(k\pi)^p}{1+[(k+1)\pi]^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{(k\pi)^p}{1+[(k+1)\pi]^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\\=&2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(k\pi)^p}{1+[(k+1)\pi]^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x\geqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q x^r}\mathrm{d}x\\=&\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q x^r}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

结合

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(k\pi)^q x^r}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\left[(k\pi)^{\frac{q}{r}}x\right]^r}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}(k\pi)^{\frac{q}{r}}} \frac{1}{1+x^r}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\int_0^1 \frac{1}{1+x^r}\mathrm{d}x$$

就有

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x \geqslant \pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[(k+1)\pi]^p}{1+(k\pi)^q x^r}\mathrm{d}x \geqslant \pi C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k+1)\pi]^p}{(k\pi)^{\frac{q}{r}}}$$

从而当 $\dfrac{q}{p+1} \leqslant r$ 时原积分发散.

(2) 我们考虑第一版中 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.(第二版改简单了)

先考虑绝对敛散性, 只需要分别判断 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\cos(1/x)|}{x^{p-1}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

1° 当 $p>1$ 时, 由 Dirichlet 判别法 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $p \leqslant 1$ 时由

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\mathrm{d}x \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^p}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}\mathrm{d}x$$

可知 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

2° 由于 $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\cos(1/x)|}{x^{p-1}}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} t^{p-3}|\cos t|\mathrm{d}t$, 而当 $p<2$ 时, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{p-3}|\cos t|\mathrm{d}t$ 收敛; 当 $2 \leqslant p \leqslant 3$ 时, 由

$$\int_1^{+\infty} t^{p-3}|\cos t|\mathrm{d}t \geqslant \int_1^{+\infty} t^{p-3}\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} t^{p-3}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} t^{p-3}\cos 2t\mathrm{d}t$$

只 $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{p-3}|\cos t|\mathrm{d}t$ 发散; 当 $p \geqslant 3$ 时, 由

$$\int_{k\pi}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} t^{p-3}|\cos t|\mathrm{d}t \geqslant \int_{k\pi}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} |\cos t|\mathrm{d}t = 1$$

知 $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{p-3}|\cos t|\mathrm{d}t$ 发散. 故当 $p<2$ 时, $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\cos(1/x)|}{x^{p-1}}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $p \geqslant 2$ 时 $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\cos(1/x)|}{x^{p-1}}\mathrm{d}x$ 发散. 故当 $1<p<2$ 时, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 在其他情况下, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 均不绝对收敛.

接下来考虑条件敛散性.

当 $p \geqslant 2$ 时, 显然 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛. 为判断 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性, 我

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

们首先有

$$\int_0^1 \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} t^{p-2}\sin\frac{1}{t}\cos t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} t^{p-2}\left[\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)-\sin\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]\mathrm{d}t$$

又由 Lagrange 中值定理有

$$\begin{aligned}&\int_{2k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2k\pi+\frac{\pi}{3}} t^{p-2}\left[\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)-\sin\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]\mathrm{d}t \geqslant \int_{2k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2k\pi+\frac{\pi}{3}} t^{p-2}\cdot\frac{2\cos(\pi/3)}{t}\mathrm{d}t\\ =&\int_{2k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2k\pi+\frac{\pi}{3}} t^{p-3}\mathrm{d}t = \frac{(2k\pi+\pi/3)^{p-2}-(2k\pi+\pi/6)^{p-2}}{p-2}\end{aligned}$$

当 $p\geqslant 3$ 时, 我们有

$$\frac{(2k\pi+\pi/3)^{p-2}-(2k\pi+\pi/6)^{p-2}}{p-2} \geqslant \frac{(\pi/6)^{p-2}}{p-2}$$

从而由 Cauchy 准则, 此时 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

当 $2\leqslant p<3$ 时, 由于

$$\int_0^1 \frac{(x-\sin x)\,|\cos(1/x)|}{x^p}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{|\cos(1/x)|}{6x^{p-3}}+o\left(\frac{1}{x^{p-3}}\right)\right]\mathrm{d}x$$

故 $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x-\sin x)\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 而 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{x^{p-1}}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} t^{p-3}\cos t\mathrm{d}t$ 收敛, 故 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $p\leqslant 1$ 时, 我们先确定 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性. 首先我们有

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+1/x)+\sin(x-1/x)}{2x^p}\mathrm{d}x$$

当 $p\leqslant 0$ 时, 对充分大的正整数 k, 利用 Jensen 不等式有

$$\begin{aligned}&\int_{2k\pi+\frac{2\pi}{3}}^{2k\pi+\frac{5\pi}{6}} \frac{\sin(x+1/x)+\sin(x-1/x)}{x^p}\mathrm{d}x\\ \geqslant&\int_{2k\pi+\frac{2\pi}{3}}^{2k\pi+\frac{5\pi}{6}} \frac{2\sin x}{x^p}\mathrm{d}x \geqslant \left(2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)^{-p}\int_{2k\pi+\frac{2\pi}{3}}^{2k\pi+\frac{5\pi}{6}} 2\sin x\mathrm{d}x\\ =&(\sqrt{3}-1)\left(2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)^{-p}\end{aligned}$$

故由 Cauchy 准则知 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

当 $0<p\leqslant 1$ 时, 由于

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin(x+1/x)+\sin(x-1/x)-2\sin x|}{2x^p}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{p+1}}$$

而 $p+1>1$, 故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+1/x)+\sin(x-1/x)-2\sin x}{2x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 从而此时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+1/x)+\sin(x-1/x)}{2x^p}\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性. 又因为此时有 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 故此时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

然后我们来确定 $\int_0^1\frac{\sin x\cos 1/x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性. 显然该积分在 $p<1$ 时收敛, 而当 $p=1$ 时, 由于我们有

$$\int_0^1\frac{\sin x\cos(1/x)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left[\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)-\sin\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]\mathrm{d}t$$

并且

$$\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left|\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)-\sin\left(t-\frac{1}{t}\right)\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

故此时 $\int_0^1\frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 也收敛.

综上, 当 $1<p<2$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛; 当 $0<p\leqslant 1$ 或 $2\leqslant p<3$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛; 当 $p\leqslant 0$ 或 $p\geqslant 3$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos(1/x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.□

10. 解答: 显然 $f(+\infty)=0$. 不妨设 $a=0$, 且 f 单调递减, 由于

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}f(x)\sin px\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{p}\right)\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}f\left(\frac{x}{p}\right)\sin x\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}f\left(\frac{x}{p}\right)\sin x\mathrm{d}x+\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}f\left(\frac{x}{p}\right)\sin x\mathrm{d}x\right]\\\geqslant&\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}f\left[\frac{(2k-1)\pi}{p}\right]\sin x\mathrm{d}x+\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}f\left[\frac{(2k-1)\pi}{p}\right]\sin x\mathrm{d}x\right\}=0\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}f(x)\sin px\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{p}\right)\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}f\left(\frac{x}{p}\right)\sin x\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}f\left(\frac{x}{p}\right)\sin x\mathrm{d}x+\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}f\left(\frac{x}{p}\right)\sin x\mathrm{d}x\right]\\\leqslant&\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}f\left[\frac{2(k-1)\pi}{p}\right]\sin x\mathrm{d}x+\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}f\left[\frac{2k\pi}{p}\right]\sin x\mathrm{d}x\right\}\\=&\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{f\left[\frac{2(k-1)\pi}{p}\right]-f\left[\frac{2k\pi}{p}\right]\right\}=\frac{2f(0)}{p}\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin px\mathrm{d}x=0.$

注: 更一般的结论 (反常积分形式的 Riemman 引理) 可参看裴礼文 P423 例 4.5.32. (用定积分的 Riemman 引理进行分段估计). □

11. 解答: 不妨设 $f(0)=0$. 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$ 使得当 $x\in(0,\delta)$ 时有

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{\int_0^{+\infty}|\phi(t)|\mathrm{d}t}$$

从而对正整数 $n>\delta^{-2}$, 有

$$\left|\int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right)\phi(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\int_0^{+\infty}|\phi(t)|\mathrm{d}t}\int_0^{\sqrt{n}}|\phi(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

显然结论成立. □

12. 解答:

(1) 对 $\varepsilon>0$, 取 $X>0$ 使得

$$\int_{-\infty}^{-X}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_X^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$$

由第十章第二组参考题第 4 题的结论, 知存在 N 使得对任意 $n>N$ 有

$$\left|\int_{-X}^{X} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

故对任意 $n>N$ 有

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_{-X}^{X} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|+\int_{-\infty}^{-X}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_X^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$

(2) 对 $\varepsilon>0$, 取 $X>0$ 使得

$$\int_{-\infty}^{-X}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_X^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}$$

且

$$\left|\int_{-X}^{X} f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\pi\varepsilon}{6}$$

由第十章第二组参考题第 4 题的结论, 知存在 N 使得对任意 $n>N$ 有

$$\left|\int_{-X}^{X} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_{-X}^{X} f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故对任意 $n > N$ 有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&\left|\int_{-X}^{X} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{-X}^{X} f(x)|\mathrm{d}x\right| \\
&+\frac{2}{\pi}\left|\int_{-X}^{X} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_{-\infty}^{-X}|f(x)|\mathrm{d}x + \int_{X}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x \\
<&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

命题得证. □

13. 解答: 不妨设 $f(b^-) = 0$, 且 f 单调递减, 则 f 是非负函数. 记 $h(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, 则据 $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ 的收敛性, 知 $h(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 分别设其最小值和最大值为 m, M.(这里 a 或 b 可能是无穷, 但如果将其纳入定义域, 则不影响最值的存在性)

现在我们任意取定 $a < c < d < b$. 设 $m(c,d), M(c,d)$ 分别是 $h(x)$ 在 $[c,d]$ 上的最小值和最大值, 由积分第二中值定理, 存在 $\xi_{c,d} \in [c,d]$ 使得

$$\int_c^d f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_c^{\xi_{c,d}} g(x)\mathrm{d}x$$

由于 f 是非负函数, 故我们有

$$f(c)m(c,d) \leqslant \int_c^d f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant f(c)M(c,d)$$

因为 $M(c,d) \leqslant M, m(c,d) \geqslant m$, 所以

$$mf(c) \leqslant \int_c^d f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant Mf(c)$$

令 $c \to a^+, d \to b^-$, 我们就有

$$mf\left(a^+\right) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant Mf\left(a^+\right)$$

所以一定存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f\left(a^+\right)h(\xi) = f\left(a^+\right)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x$$

因为 f 单调递减趋于 0, 设 $\widetilde{f(x)} = f(x) - f(b^-)$, 则 $\widetilde{f}$ 也单调递减趋于 0, 于是由上述论证可知存在 $\xi \in [a,b]$, $s.t.$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - f(b^-)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b (f(x)-f(b^-))g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \widetilde{f(x)}g(x)\mathrm{d}x = \widetilde{f(a^+)}\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x \\ &= [f(a^+)-f(b^-)]\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

此即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f\left(a^+\right)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f\left(b^-\right)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

证毕. □

14. 解答: 广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减且有界, 由 Abel 判别法, $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

下面反设结论不成立, 则对任意 $x\in[1,+\infty)$, $\int_1^{+\infty} x^{-1}f(x)\mathrm{d}x \neq \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$. $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 由介值定理, $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t > \int_1^{+\infty} x^{-1}f(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t < \int_1^{+\infty} x^{-1}f(x)\mathrm{d}x$ 恒成立. 不妨设 $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t > \int_1^{+\infty} x^{-1}f(t)\mathrm{d}x$ 恒成立, 则 $\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t > \frac{1}{x^2}\int_1^{+\infty} t^{-1}f(t)\mathrm{d}t$, $x\in[1,+\infty)$, 两边积分, 有

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x > \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\int_1^{+\infty} t^{-1}f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} t^{-1}f(t)\mathrm{d}t$$

我们来计算 $\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$. 为此, 先来计算 $\int_1^A\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x, A>1$.

(1) 如果 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 则 $\left[\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]' = f(x)$. 分部积分有

$$\begin{aligned}\int_1^A\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x &= -\int_1^A\left[\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\frac{1}{x} \\ &= -\frac{\int_1^x f(t)\mathrm{d}t}{x}\Big|_1^A + \int_1^A\frac{\mathrm{d}\left[\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]}{x} \\ &= -\frac{\int_1^A f(t)\mathrm{d}t}{A} + \int_1^A\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\int_1^A f(x)\mathrm{d}x}{A} + \int_1^A\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(2) 对于一般情形, 由第十章第一组参考题第 5 题的结论, 存在折线函数列 $\{f_n(x)\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^A |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故

$$\begin{aligned}
&\left|\int_1^A\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f_n(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x-\int_1^A\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\right| \\
=&\left|\int_1^A\left\{\frac{1}{x^2}\int_1^x\left[f_n(t)-f(t)\right]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&\int_1^A\left\{\frac{1}{x^2}\int_1^x\left|f_n(t)-f(t)\right|\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^A\left\{\frac{1}{x^2}\int_1^A\left|f_n(t)-f(t)\right|\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x \\
=&\int_1^A\left|f_n(t)-f(t)\right|\mathrm{d}t\int_1^A\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\left(1-\frac{1}{A}\right)\int_1^A\left|f_n(t)-f(t)\right|\mathrm{d}t \\
\leqslant&\int_1^A\left|f_n(t)-f(t)\right|\mathrm{d}t\to 0,(n\to\infty)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\int_1^A\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f_n(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x-\int_1^A\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\right|=0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_1^A\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f_n(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_1^A\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

折线函数列 $f_n(x)$ 是连续函数, 故

$$\int_1^A\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f_n(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=-\frac{\int_1^A f_n(x)\mathrm{d}x}{A}+\int_1^A\frac{f_n(x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&\left|-\frac{\int_1^A f_n(x)\mathrm{d}x}{A}+\int_1^A\frac{f_n(x)}{x}\mathrm{d}x-\left[-\frac{\int_1^A f(x)\mathrm{d}x}{A}+\int_1^A\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right]\right| \\
=&\left|\frac{\int_1^A\left[f(x)-f_n(x)\right]\mathrm{d}x}{A}+\int_1^A\frac{f_n(x)-f(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&\frac{\int_1^A\left|f(x)-f_n(x)\right|\mathrm{d}x}{A}+\int_1^A\frac{\left|f_n(x)-f(x)\right|}{x}\mathrm{d}x \\
\leqslant&\frac{\int_1^A\left|f_n(x)-f(x)\right|\mathrm{d}x}{A}+\int_1^A\left|f_n(x)-f(x)\right|\mathrm{d}x \\
=&\left(1+\frac{1}{A}\right)\int_1^A\left|f_n(x)-f(x)\right|\mathrm{d}x\to 0(n\to\infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_1^A\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f_n(x)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{\int_1^A f_n(x)\mathrm{d}x}{A}+\int_1^A\frac{f_n(x)}{x}\mathrm{d}x\right] \\
&=-\frac{\int_1^A f(x)\mathrm{d}x}{A}+\int_1^A\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

综上, 无论 $f(x)$ 是否连续, 都可以得到上述等式. 于是

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x &= \lim_{A\to+\infty}\int_1^A\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\\ &= \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{\int_1^A f(x)\mathrm{d}x}{A}+\int_1^A\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right]\\ &= \int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

但

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x > \int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

矛盾. 因此命题成立, 证毕. □

15. 解答: 由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\int_a^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\left(\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right)} < +\infty$$

结合题设条件易见结论成立. □

16. 解答:

(1) 由

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

及

$$\int_1^{+\infty}(e-0.1)^{-t}\mathrm{d}t < \frac{1}{\ln(e-0.1)} < +\infty, \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{(e-0.1)^{-t}} = 0$$

即得结论.

(2)$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t^x = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}t^x\mathrm{d}e^{-t} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$.

(3)$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t = e^0 = 1, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!$.

(4)$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}\sqrt{t} = 2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. □

第二组参考题 学员: d39

1. 解答: 分别在熟知不等式 $e^t \geqslant 1+t$ 中取 $t=-x^2$ 和 x^2 即得 (12.8), 进而得到

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\left(1-x^2\right)^n \leqslant e^{-nx^2} \leqslant \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}$$

$$\int_0^{+\infty}\left(1-x^2\right)^n \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}$$

而

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

故我们又有

$$\sqrt{n}\int_0^{+\infty}\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^n}$$

由于 (三角代换后 Wallis 公式)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}, \quad \int_0^1\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

故有

$$\sqrt{n}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$$

利用 (11.29), 令 $n\to\infty$, 就有 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

2. 解答: 设 $\displaystyle P(x) = \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} - \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$, 由于

$$P'(x) = \frac{-x^2e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} + e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}} < 0$$

且 $P(+\infty)=0$, 故 $P(x)>0$, 即

$$\frac{1}{x} > e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = f(x)$$

在 $\displaystyle e^{-\frac{x^2}{2}}f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ 两边同时求导数, 并同时约掉 $e^{-\frac{x^2}{2}}$, 得到 $f'(x)-xf(x)=-1$.
所以有 $f'(x) = xf(x)-1<0$, 即 $f(x)$ 严格单调递减.
最后设 $\displaystyle Q(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t - \frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 由于

$$\begin{aligned} Q'(x) &= -e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x^2}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\frac{-1}{x^2+1} - \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{-2}{\left(x^2+1\right)^2} < 0 \end{aligned}$$

且 $Q(+\infty)=0$, 故 $Q(x)>0$, 即 $\displaystyle f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t > \frac{x}{x^2+1}$. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

3. 解答: 本题是 Hardy 不等式的特例 (一般形式的 Hardy 不等式会给条件 f 非负).
对任意 $A>a>0, p>1$ 且 p 为偶数, 由 Hölder 不等式有

$$\int_a^A \frac{g^p(x)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_a^A \frac{g^p(x)}{1-p}\mathrm{d}x^{1-p}\leqslant \frac{x^{1-p}g^p(x)}{1-p}\Big|_a^A+\frac{p}{p-1}\int_a^A x^{1-p}|g(x)|^{p-1}|f(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{+\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^A\frac{|g(x)|^p}{x^p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

即

$$\left(\int_a^A \frac{g^p(x)}{x^p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{+\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

令 $a\to 0^+, A\to+\infty$, 则

$$\left(\int_0^{+\infty} \frac{g^p(x)}{x^p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{+\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

取偶数 $p=2$ 即得本题结论.
注: 关于离散形式的 Hardy 不等式可以参考朱尧辰 P203 6.8, 并且证明了不等式右端的系数是最佳系数. 积分形式的 Hardy 不等式 (本题) 也可以在匡继昌《常用不等式》P538 找到更多的证明方法. □

4. 解答: 首先由 $f^2+f''^2\geqslant 2|ff''|$ 且 f^2 和 f''^2 可积可知 $|ff''|$ 可积, 从而 ff'' 可积. 由 $\int_0^{+\infty}f^2$ 收敛知 $f\not\to+\infty$, 又由

$$f^2(x)-f^2(a)=2\int_a^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

两边令 $x\to+\infty$ 可知 $ff'\not\to+\infty$. 注意到

$$\int_a^x f(t)f''(t)\mathrm{d}t=f(x)f'(x)-f(a)f'(a)-\int_a^x[f'(t)]^2\,\mathrm{d}t$$

可选取 $x_n\to+\infty$ 使得 $f(x_n)f'(x_n)$ 有界, 则 $\int_a^{x_n}[f'(t)]^2\,\mathrm{d}t$ 有界从而收敛, 由海涅原理可知 f' 也平方可积.
注: 本题思想方法来源于周民强第二册 P117 2.1.17(4), 但严谨来说周民强上的做法不够准确, 一个非负函数平方可积不能推出有界 (例题 12.2.5 注). □

5. 解答: 注意到

$$\int_0^{+\infty}xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}xf^2(x)\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$$

由题设可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf^2(x)$ 极限存在. 又

$$xf^2(x)\leqslant x^2f^2(x), x\geqslant 1$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故 $\int_0^{+\infty} xf^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 又 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf^2(x)$ 极限存在, 反证可知只能 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf^2(x)=0$.
因为

$$\int_0^{+\infty}\left[2xf(x)f'(x)+f^2(x)\right]\mathrm{d}x = xf^2(x)\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} xf^2(x) - 0\cdot f(0) = 0$$

所以结合 Cauchy-Schwarz 不等式, 就有

$$\begin{aligned}
&2\left[\int_0^{+\infty} x^2f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} - \int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x\\
\geqslant& -2\int_0^{+\infty} xf(x)f'(x)\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x\\
=& -\int_0^{+\infty}\left(2xf(x)f'(x)+f^2(x)\right)\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

最后来考虑取等条件. 这等价于上面证明中唯一得那一步放缩取到等号, 亦即

$$\left[\int_0^{+\infty} x^2f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} = -\int_0^{+\infty} xf(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

这等价于 $f'(x), xf(x)$ 中有一个恒为零, 或者 $f'(x)=-2bxf(x), b>0$. 由于 $f'(x), xf(x)$ 都是平方可积的, 所以 $f'(x), xf(x)$ 中有一个恒为零当且仅当二者均恒为零, 也就是两种情况可合并为后一种情况. 对于后一种情况, 由于

$$\left[e^{bx^2}f(x)\right]' = e^{bx^2}\left(f'(x)+2bxf(x)\right) = 0$$

故 $f(x)=ae^{-bx^2}(b>0)$.
注: 我们再给出一个证明: 对任意 $x\geqslant 0$, 设 $f_0=f(x)$,

$$\alpha^2 = \int_x^{+\infty} t^2f^2(t)\mathrm{d}t,\quad \beta^2 = \int_x^{+\infty}(f'(t))^2\mathrm{d}t$$

对所有 $t\geqslant 0$, 有

$$f(x+t)-f(x) = \int_x^{x+t} f'(u)\mathrm{d}u$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant\beta\sqrt{t}$$

假设 $0\leqslant h\leqslant f_0^2/\beta^2$, 则对 $0\leqslant t\leqslant h$ 有

$$|f(x+t)|\geqslant f_0-\beta\sqrt{h}\geqslant 0$$

从而

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\alpha \geqslant x\sqrt{h}(f_0 - \beta\sqrt{h})$$

取 $\sqrt{h} = f_0/2\beta$, 则

$$xf_0^2 \leqslant 4\alpha\beta$$

令 $x \to +\infty$, 得

$$\lim_{x\to+\infty} xf^2(x) = 0$$

由分部积分及 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x &= xf^2(x)\Big|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} xf(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\int_0^{+\infty} x|f||f'| \\ &\leqslant 2\left(\int_0^{+\infty} x^2|f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{+\infty}|f'|^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

如果将题的 $[0,+\infty)$ 换作 $(-\infty,+\infty)$, 就可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f'|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

注: 这个不等式正是量子力学中的 Heisenberg 不确定性原理, 并且它还可以继续推广, 参见哈代《不等式》P184 第 226 题与匡继昌《常用不等式》P553 第 7 题. □

6. 解答:

$$\begin{aligned}&\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}} \\ =&x^{\frac{1}{4}}\cdot\left[\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}}-1} - \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{b}{x}}}\right] \\ =&x^{\frac{1}{4}}\cdot\left[\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{x} - \frac{1}{8}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{x} + \frac{1}{8}\left(\frac{b}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right] \\ =&x^{-\frac{1}{4}}\cdot\left[\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} - \sqrt{\frac{b}{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{b}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}\right] \\ =&x^{-\frac{1}{4}}\cdot\left[\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\left(1-\frac{1}{8}\cdot\frac{a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \sqrt{\frac{b}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{b}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \\ =&x^{-\frac{1}{4}}\cdot\left[\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{\frac{b}{2}}\right] - \frac{1}{8}x^{-\frac{5}{4}}\left[a\sqrt{\frac{a}{2}}+b\sqrt{\frac{b}{2}}\right] + o\left(x^{-\frac{5}{4}}\right)\end{aligned}$$

当且仅当 $a = b$ 时, 原积分收敛. □

7. 解答: 由于有理函数 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积, 故其在 $(-\infty,+\infty)$ 内部不可能有瑕点, 且分子和分母的次数满足 $\deg Q - \deg Q > 1$. 因而可设

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m_k}\left(\frac{A_{k,t}}{(x-a_k-b_ki)^t}+\frac{B_{k,t}}{(x-a_k+b_ki)^t}\right)\quad(b_k>0,p_k^2<4q_k)$$

现设 $x_k=a_k+b_ki$, 由条件知 $A_k=A_{k,1}$, 从而我们有

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q},x_k\right)=A_k$$

由于 $\deg Q-\deg Q>1$, 故 $\lim\limits_{z\to\infty}z\cdot\dfrac{P(z)}{Q(z)}=0$, 因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q},x_k\right)=2\pi i\sum_{k=1}^{n}A_k$$

注: (1) 事实上这是复变函数论中的留数定理, 可参看钟玉泉《复变函数论》P239-P241.

(2) 当 $x_k=a_k+b_ki$ 为单根时, $\dfrac{A_k}{x-x_k}$ 是 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的部分分式分解中唯一含 $x-x_k$ 的项, 故此时我们有 $A_k=\lim\limits_{x\to x_k}\dfrac{P(x)}{Q(x)}(x-x_k)=\lim\limits_{x\to x_k}\dfrac{P(x)}{Q(x)-Q(x_k)}(x-x_k)=\dfrac{P(x_k)}{Q'(x_k)}$. □

8. 解答:

(1) 这里 x_k 都是单根, 故

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}&=\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{nx_k^{2n-1}}=-\frac{\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=-\frac{\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k\pi i}{n}-\frac{\pi i}{2n}}=-\frac{\pi i}{n}\cdot\frac{e^{\frac{\pi i}{2n}}\left(e^{\pi i}-1\right)}{e^{\frac{\pi i}{n}}-1}\\&=\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{e^{\frac{\pi i}{2n}}}{e^{\frac{\pi i}{n}}-1}=\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi i}{2n}}-e^{-\frac{\pi i}{2n}}}=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\operatorname{Im}e^{\frac{\pi i}{2n}}}=\frac{\pi}{n}\csc\frac{\pi}{2n}\end{aligned}$$

注: 我们甚至可以求出被积函数的不定积分:

令 $a_k=e^{\frac{2k-1}{2n}\pi i}(k=1,2,\cdots,2n)$, 则 $f(x)=\prod\limits_{k=1}^{2n}(x-a_k)$. 利用上一题的注中的结论, 可知

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k}{x-a_k}$$

其中 $A_k=\lim\limits_{x\to a_k}\dfrac{x-a_k}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{x\to a_k}\dfrac{1}{2nx^{2n-1}}=-\dfrac{a_k}{2n}$. 故

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^{2n}}&=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{a_k}{x-a_k}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{x-a_k}+\frac{\overline{a_k}}{x-\overline{a_k}}\right)\\&=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(a_k+\overline{a_k}\right)x-2}{x^2-\left(a_k+\overline{a_k}\right)x+1}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cdot\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cdot\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1}\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}&=\frac{1}{n}\int\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cdot\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cdot\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}\int\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^2\dfrac{2k-1}{2n}\pi-\left(x-\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}{\left(x-\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)^2+\sin^2\dfrac{2k-1}{2n}\pi}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\arctan\frac{x-\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\dfrac{2k-1}{2n}\pi}-\frac{1}{2n}\\&=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\ln\left(x^2-2x\cdot\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right)+C\end{aligned}$$

(2) 类似的, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x&=\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{2m}}{nx_k^{2n-1}}=-\frac{\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{2m+1}=-\frac{\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\left(\frac{k\pi i}{n}-\frac{\pi i}{2n}\right)(2m+1)}\\&=-\frac{\pi i}{n}\cdot\frac{e^{\frac{(2m+1)\pi i}{2n}}\left(e^{(2m+1)\pi i}-1\right)}{e^{\frac{(2m+1)\pi i}{n}}-1}=\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{e^{\frac{(2m+1)\pi i}{2n}}}{n}\cdot\frac{e^{\frac{(2m+1)\pi i}{2n}}}{(2m+1)\pi i/n-1}\\&=\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{1}{e^{\frac{(2m+1)\pi i}{2n}}-e^{-\frac{(2m+1)\pi i}{2n}}}=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\operatorname{Im}e^{\frac{(2m+1)\pi i}{2n}}}=\frac{\pi}{n}\csc\frac{(2m+1)\pi}{2n}\end{aligned}$$

利用 (1) 和 (2) 的结果有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{50}}{x^{100}+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{50}}{x^{100}+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{100}\csc\frac{51\pi}{100}=\frac{\pi}{100}\sec\frac{\pi}{100}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{30}+1}{x^{60}+1}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{x^{30}}{x^{60}+1}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{60}+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}\csc\frac{31\pi}{60}+\frac{\pi}{30}\csc\frac{\pi}{60}\\&=\frac{\pi}{30}\sec\frac{\pi}{60}+\frac{\pi}{30}\csc\frac{\pi}{60}=\frac{\pi}{30}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{60}+\cos\dfrac{\pi}{60}}{\sin\dfrac{\pi}{60}\cos\dfrac{\pi}{60}}\\&=\frac{\sqrt{2}\pi}{15}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin\dfrac{\pi}{30}}}{\sin\dfrac{\pi}{30}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{15}\cdot\sqrt{\csc^2\frac{\pi}{30}+\csc\frac{\pi}{30}}\end{aligned}$$

这就得到了答案. □

9. 解答:

(1) 假设存在 $x_0>0$ 使得 $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_0}f(x)\mathrm{d}x<\frac{x_0^2}{1+x_0^2}$, 则 $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{1+x_0^2}$. 从而我们有

$$\int_{x_0}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0}^{+\infty}x_0f(x)\mathrm{d}x>\frac{x_0}{1+x_0^2}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\int_{x_0}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0}^{+\infty} x_0^2 f(x)\mathrm{d}x > \frac{x_0^2}{1+x_0^2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{x_0} x f(x)\mathrm{d}x < -\frac{x_0}{1+x_0^2}, \quad \int_{-\infty}^{x_0} x^2 f(x)\mathrm{d}x < \frac{1}{1+x_0^2}.$$

但我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_{-\infty}^{x_0} (x_0 x+1)^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= x_0^2 \int_{-\infty}^{x_0} x^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x + 2x_0 \int_{-\infty}^{x_0} x f(x)\mathrm{d}x \\ &< x_0^2 \cdot \frac{1}{1+x_0^2} + \frac{x_0^2}{1+x_0^2} - 2x_0 \cdot \frac{x_0}{1+x_0^2} = 0 \end{aligned}$$

矛盾. 所以对任意 $x>0$, 均有 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

(2) 当 $x<0$ 时, 与 (1) 同理, 我们有 $\int_{x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{x^2}{1+x^2}$. 从而 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$. □

10. 解答: 注意到

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{2}+n\right)pt + \sin\left(\frac{1}{2}-n\right)pt}{\sin\frac{1}{2}pt} = 2\cos npt$$

故

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\left[\frac{x}{p}\right]}^{\left[\frac{x}{p}\right]} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)pt}{\sin\frac{1}{2}pt} \cdot \frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]} \cos npt\right) \frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]} \frac{\sin(x+np)t + \sin(x-np)t}{t}\mathrm{d}t \\ &= \pi \cdot \operatorname{sgn} x + \pi \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]} [\operatorname{sgn}(x+np) + \sin(x-np)] \end{aligned}$$

(1) 若 $x = kp (k \in \mathbb{Z}^+)$, 则 $I = \pi + \pi(k+k-1) = 2k\pi$.

(2) 若 $kp < x < (k+1)p$, 则 $I = \pi + \pi(k+k) = (2k+1)\pi$. 设

$$g(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{x}{p}\right] + \dfrac{1}{2}, & x \geqslant 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases}$$

则 $I = \pi[g(x^+) + g(x^-)], x>0$.

易见, 上式对 $x<0$ 的情形亦成立. 综上所述, $\forall x \in \mathbb{R}, I = \pi[g(x^+) + g(x^-)]$. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第十三章 数项级数

§13.1.2 思考题 学员: d39

1. 解答: 记 Archilles 每次到达乌龟出发点所需的时间为 a_n, 则有 $a_{n+1}=a_n\cdot 0.1/10=10^{-2}a_n, a_1=100$. Archilles 赶上乌龟所需要的时间为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{100}{1-10^{-2}}=\dfrac{10000}{99}$. □

2. 解答:

(1) 若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均收敛

(i)$\sum(a_n\pm b_n)$ 收敛 (极限的四则运算);

(ii)$\sum a_nb_n$ 未必收敛, 例如 $a_n=b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;

(iii)$\sum\dfrac{a_n}{b_n}$ 未必收敛, 例如 $a_n=\dfrac{1}{n^2}, b_n=\dfrac{1}{n^3}$.

(2) 若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均发散

(i)$\sum(a_n\pm b_n)$ 未必发散, 例如 $a_n=n, b_n=\mp n$;

(ii)$\sum a_nb_n$ 未必发散, 例如 $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$;

(iii)$\sum\dfrac{a_n}{b_n}$ 未必发散, 例如 $a_n=1, b_n=n^2$.

(3) 若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均为正项级数且收敛

(i) 结论不变;

(ii)$\sum a_nb_n$ 收敛. 因为级数收敛通项必定有界, 设 $a_n<M$, 则 $\sum a_nb_n<M\sum b_n$, 由比较判别法知 $\sum a_nb_n$ 收敛;

(iii) 结论不变.

(4) 若 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均为正项级数且发散

(i)$\sum(a_n+b_n)$ 发散. 因为 $\sum(a_n+b_n)>\sum a_n\to+\infty$. $\sum(a_n-b_n)$ 未必发散, 例如 $a_n=b_n=n$;

(ii) 结论不变;

(iii) 结论不变. □

3. 解答:

对于 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均为正项级数的情况

(1)$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均收敛

(i)$\sum\min\{a_n,b_n\}$ 收敛. 这是因为 $\min\{a_n,b_n\}\leqslant a_n$;

(ii)$\sum\max\{a_n,b_n\}$ 收敛. 这是因为 $\max\{a_n,b_n\}<a_n+b_n$.

(2)$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均发散

(i)$\sum\min\{a_n,b_n\}$ 未必发散, 例如 $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}, n=2k-1\\ n, n=2k\end{cases}, b_n=\begin{cases}n, n=2k-1\\ \dfrac{1}{n^2}, n=2k\end{cases}$;

(ii)$\sum\max\{a_n,b_n\}$ 发散. 这是因为 $\max\{a_n,b_n\}\geqslant a_n$.

对于 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 为一般项级数的情况

(1)$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均收敛

(i)$\sum \min\{a_n, b_n\}$ 未必收敛, 例如 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} = -b_n$;

(ii)$\sum \max\{a_n, b_n\}$ 未必收敛, 反例与 (i) 相同.

(2)$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 均发散

(i)$\sum \min\{a_n, b_n\}$ 未必发散, 反例不变;

(ii)$\sum \max\{a_n, b_n\}$ 未必发散. 例如 $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}, n = 2k-1 \\ -n, n = 2k \end{cases}$, $b_n = \begin{cases} -n, n = 2k-1 \\ \dfrac{1}{n^2}, n = 2k \end{cases}$. □

4. 解答: 若 $\sum(a_n + a_{n+1})$ 收敛, 不能推出 $\sum a_n$ 收敛, 例如取 $a_n = (-1)^n$. 若 $\sum a_n$ 是正项级数, 则可由 $\sum a_n \leqslant \sum(a_n + a_{n+1})$ 可知 $\sum a_n$ 收敛. □

5. 解答: 只有当原级数收敛时, 加括号才不改变原级数的收敛性. 易证 S 是发散的, 因此不可以随意添括号. 对于该级数的 Cesàro 求和参见本章第二组参考题第 20 题 (1).

6. 解答: 注意到

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0$$

故原级数收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

7. 解答: 不能够推出 $\sum a_n$ 收敛, 例如取调和级数 $\sum a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i}$. □

8. 解答: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛. 这是因为我们有

$$0 \leqslant c_n - a_n \leqslant b_n - a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n) < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$$

但是如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则不能推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也发散, 例如 $a_n = -1, b_n = 1, c_n = 0$. 这与数列的夹逼定理是不同的. □

9. 解答: 记原级数部分和为 S_n, 新级数部分和为 T_n, 注意到 $T_{2n} = S_{2n} \to S$ 与 $T_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+2} \to S$, 因此 T_n 也收敛. □

10. 解答: 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故余项 $R_n \to 0$. 如果始终存在 a_N 不为 0, 则会导出始终存在 $R_N \geqslant 1$, 矛盾. 因此从某项起 a_n 皆为 0, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是有限和. □

§13.2.5　练习题　学员: d39

1. 解答: 由 Stolz 定理可知

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{R_n}{R'_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{R_{n-1}-R_n}{R'_{n-1}-R'_n}=1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S'_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1.$ □

2. 解答: 如果正项级数收敛, 则加括号后的新级数可看作原级数的子列, 当然也收敛; 如果正项级数趋于正无穷, 则因为单调性, 可知加括号后的新级数作为原级数的子列也趋于正无穷. 下证正项级数重排后不改变敛散性:

设正项级数 $\{u_n\}$ 的第 n 个部分和为 S_n 且收敛于 S, 重排后的级数 $\{v_n\}$ 的第 m 个部分和为 σ_m. 易知对每一 $v_k(1\leqslant k\leqslant m)$, 都存在与其相等的 $u_{i_k}(1\leqslant k\leqslant m)$. 记

$$n=\max\{i_1,i_2,\cdots,i_m\}$$

则对任何 m, 都存在 n, 使 $\sigma_m\leqslant S_n$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, 所以对任何正整数 m 都有

$$\sigma_m\leqslant S$$

即知重排后的级数收敛, 且其和 $\sigma\leqslant S$. 但是另一方面,$\{u_n\}$ 也可看作是由 $\{v_n\}$ 重排得到的, 故也有 $S\leqslant\sigma$. 于是就有 $\sigma=S$. □

3. 解答:

(1) 当 n 充分大时,$3^{\sqrt{n}}>(\sqrt{n})^3$, 因此 $\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}<\dfrac{1}{n^{3/2}}$, 由比较判别法知原级数收敛.

(2) 当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}\sim\dfrac{1}{n}$, 知原级数发散.

(3) 当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{2n^2}$, 知原级数收敛.

(4) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\dfrac{n^2}{2n^2+n+1}\right)^{1/2}\cdot\left[\dfrac{n}{(2n^2+n+1)^{1/2}}\right]^{-1/n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$, 原级数收敛.

(5) 注意到 $a_n=\exp\left[(\ln n)^2-n\ln\ln n\right]$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\exp\left[\dfrac{(\ln n)^2}{n}-\ln\ln n\right]=0$, 故原级数收敛.

(6) 当 $n\to\infty$ 时,$a_n=\exp\left[\ln n-\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\right]/n^{p+1}\sim\dfrac{e^{-\gamma}}{n^{p+1}}$, 当 $p>0$ 时收敛, 当 $p\leqslant 0$ 时发散.

(7) 当 $n\to\infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}a^{1/n}-\frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}&=1+\frac{\ln a}{n}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\ln b}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\ln c}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\\&=\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

故当且仅当 $a^2=bc$ 时原级数收敛.

(8) 当 $n\to\infty$ 时,$\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^n=\exp\left[n\ln\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)\right]\sim\dfrac{1}{n}$, 故原级数发散. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

4. 解答: 特殊情况即 $a_n \equiv 0$. 排除这种情况, 记 $\{a_n\}$ 的部分和为 S_n. 则因为 $\sum \frac{1}{n}$ 发散, 故存在 $\varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+, \exists p \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{N+p} \geqslant \varepsilon_0$$

这可以推得

$$\frac{S_{N+1}}{N+1} + \frac{S_{N+2}}{N+2} + \cdots + \frac{S_{N+p}}{N+p} \geqslant \frac{S_N}{N+1} + \frac{S_N}{N+2} + \cdots + \frac{S_N}{N+p} \geqslant S_N \varepsilon_0$$

与 Cauchy 收敛准则矛盾, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 必发散. □

5. 解答:

(1)$1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3}{2n+2}$, $\sum \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散, 由 Sapagof 判别法知原数列收敛于 0.

(2)$1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\sum \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散, 由 Sapagof 判别法知原数列收敛于 0.

注: 这里利用了 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的 Maclaurin 公式 (例题 7.2.4).

(3)$1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{x}{x+n+1}$, $\sum \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散, 由 Sapagof 判别法知原数列收敛于 0. □

6. 解答: 取 $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, n\text{为平方数} \\ 0, \text{其他} \end{cases}$. □

7. 解答: $\sum a_n$ 收敛可知 $\lim\limits_{m\to\infty} a_n = 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^p}{a_n} = 0$, 从而 $\sum a_n^p$ 收敛.

注: 正项级数的条件不可去, 如当 $p=2$ 时可取反例 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 又如当 $p=3$ 时裴礼文 P466 例 5.1.48 的例子.(本章第二组参考题第 13 题) □

8. 解答: 记 $c_n = a_n - a_{n+1}$, 则由 $b_n \geqslant 0$ 可知 $c_n \geqslant c_{n+1}$, 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = a_1 - a_{n+1} \to a_1$, 故 c_n 单调递减且收敛. 由 Cauchy 准则知, 任给 $\varepsilon > 0$,$\exists N$,$\forall n > N$, 有

$$0 < c_{N+1} + c_{N+2} + \cdots + c_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

又当 $n > N$ 时, $c_{N+i} \geqslant c_n, i = 1, 2, \cdots, n-N$, 从而

$$0 < (n-N)c_n \leqslant c_{N+1} + c_{N+2} + \cdots + c_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $n > 2N$, 则 $0 < \dfrac{n}{2}c_n \leqslant (n-N)c_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 即 $0 < nc_n < \varepsilon$. 因此 $nc_n \to 0$.

于是有

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k = \sum_{k=1}^{n} k(c_k - c_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} c_k - nc_{n+1} = a_1 - a_{n+1} - nc_{n+1} \to a_1$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n$ 收敛. □

9. 解答: 考虑

$$S_{2^n-1} = a_1 + \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} (a_{2k+1} + a_{2k}) > a_1 + \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} a_k = a_1 + S_{2^{n-1}-1}$$
$$> 2a_1 + S_{2^{n-2}-1} > \cdots > na_1$$

令 $n \to \infty$ 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

10. 解答: 注意到

$$\frac{x^n}{(1+x)\cdots(1+x^n)} = \frac{1}{(1+x)\cdots(1+x^{n-1})} - \frac{1}{(1+x)\cdots(1+x^n)} \overset{def}{=\!=} b_{n-1} - b_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{(1+x)\cdots(1+x^k)} = b_1 - b_n < b_1 = \frac{1}{1+x}$$

故原级数收敛. □

11. 解答: 首先注意当 $n \to \infty$ 时 $2 - x^{\frac{1}{n}} \to 1$, 故对任何 $x > 0$, 当 n 充分大时, 去掉有限项后原级数是正项级数.

(1) 当 $x \in (0,1]$ 时, $\prod\limits_{k=1}^{n}(2 - x^{\frac{1}{k}}) \geqslant 1$, 通项不趋于 0, 原级数发散.

(2) 当 $x = 2$ 时显然级数收敛.

(3) 当 $x \in (1,2) \cup (2,e)$ 时, 则因为

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \frac{x^{\frac{1}{n+1}} - 1}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} \to n\left[\exp\left(\frac{1}{n+1}\ln x\right) - 1\right] \sim \frac{n}{n+1}\ln x \to \ln x$$

根据 Raabe 判别法, 当 $x \in (1,2) \cup (2,e)$ 时原级数发散.

(4) 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, 由 (3) 可知原级数收敛.

(5) 当 $x = e$ 时, 则因为

$$\begin{aligned}\ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] &\to \ln n\left[n\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) - \left(2 - e^{\frac{1}{n+1}}\right)\right] \\ &= \ln n\left[(n+1)e^{\frac{1}{n+1}} - n - 2\right] \\ &= \ln n\left[(n+1)\left(1 + \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) - n - 2\right] \\ &= \ln n \cdot o\left(\frac{1}{n+1}\right) \to 0\end{aligned}$$

由 Bertrand 判别法, 原级数发散.

综上, 当 $x \in (0,2) \cup (2,e)$ 时原级数发散, 当 $x \in \{2\} \cup [e, +\infty)$ 时原级数收敛. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

12. 解答:

(1) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(a_n/a_{n+1})}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n/a_{n+1}-1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

(2) 由题意可知

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\Rightarrow\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}=1+\frac{\beta}{(n+1)\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

故由 Stolz 定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1/\left(na_n\right)\right)}{\ln\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}}{\ln[\ln(n+1)/\ln n]}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left[1+\dfrac{\beta}{(n+1)\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right]}{\ln\left[\ln(n+1)/\ln n\right]}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\beta}{(n+1)\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)}{\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta+o(1)}{(n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\beta\end{aligned}$$

命题得证. □

13. 解答: 考虑 $\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\},\cdots,\{a_n^{(k)}\}$ 这 k 个数列, 其中 $a_n^{(m)}=a_{nk+m}$. 则由题设可知 $\forall m\in\{1,2,\cdots,k\}$, 都满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}^{(k)}}{a_n^{(k)}}=l$. 如果 $l<1$, 则由 d'Alembert 判别法知这 k 个数列都收敛. 而 $S_{6n}=\sum\limits_{i=1}^{6n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{k}S_n^{(i)}$, 不难得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 同理可证 $l>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

14. 解答: 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛可知 R_n 单调递减趋于 0. 又有

$$\frac{a_n}{R_{n-1}}=\frac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}}=1-\frac{R_n}{R_{n-1}}$$

由 Sapagof 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{R_n}{R_{n-1}}\right)$ 发散.

若 $p\geqslant 1$, 则结论平凡, 因为 n 充分大时有 $\dfrac{a_n}{R_{n-1}^{1-p}}\leqslant a_n$.

若 $p\in(0,1)$, 则由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in(R_n,R_{n-1})$ 使

$$R_{n-1}^p-R_n^p=(R_{n-1}-R_n)\cdot p\xi^{p-1}>(R_{n-1}-R_n)\cdot\frac{p}{R_{n-1}^{1-p}}=\frac{pa_n}{R_{n-1}^{1-p}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{R_{k-1}^{1-p}}<\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left(R_{n-1}^p-R_n^p\right)=\frac{R_0^p-R_n^p}{p}<\frac{R_0^p}{p}=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{R_{k-1}^{1-p}}$ 收敛. □

15. 解答: 由例题 8.1.10 可知 $a_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{n}}, a_n^p\sim\dfrac{3^{p/2}}{n^{p/2}}$, 当且仅当 $p>2$ 时原级数收敛. □

§13.3.4 练习题 学员: d39

1. 解答:

(1) 当 n 充分大时 $\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{n}$, 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ 发散. 由例题 13.3.3 即知原级数条件收敛.

(2) $\dfrac{2^{1/n}}{\sqrt{n}}$ 单调递减趋于 0, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 部分和有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 但是 $\dfrac{2^{1/n}}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 所以非绝对收敛.

(3) 考虑

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^2 k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2k}{2k}$$

令 $n\to\infty$, 前者发散, 后者由 Dirichlet 判别法知收敛, 所以原级数非绝对收敛. 再考虑

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\cos 2k}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2k+k\pi)}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2+\pi)k}{2k}$$

因 $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2+\pi)k$ 有界, 由 Dirichlet 判别法知上述级数收敛, 从而易知原级数条件收敛.

(4) 当 $x=k\pi$ 时结论平凡, 假设 $x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\dfrac{1}{n}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e}{n}$ 发散且容易验证其通项单调递减趋于 0, 利用例题 13.3.3 即知原级数条件收敛.

(5) 当 $x=k\pi$ 时结论平凡, 假设 $x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$. 考虑 $a_n=\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, 则

$$a_n-a_{n+1}>\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n(n+1)^2}>0$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ 由 Cauchy 积分判别法知发散, 由例题 13.3.3 知原级数条件收敛.

(6) 注意到

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)=(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a}+n}\overset{def}{=\!=}(-1)^n a_n$$

显然 $a_n\searrow 0$; 由 Leibniz 判别法原级数收敛. 又

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$a_n \sim \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a}+n} \sim \frac{\pi a^2}{2n}$$

故 $\sum a_n$ 发散, 原级数非绝对收敛.

(7) 如果 $p \leqslant 0$, 显然原级数发散. 如果 $p>0$, 则 $\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$ 单调递减趋于 0, 由 Leibniz 判别法原级数收敛. 又由 Wallis 公式有

$$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p \sim (n\pi)^{-p/2}$$

即知当 $p>2$ 时原级数绝对收敛, 当 $p \in (0,2]$ 时原级数条件收敛.

(8) 注意到

$$\frac{(-1)^n \sin n}{n} = \frac{\sin(n(1+\pi))}{n}$$

由例题 13.3.3 可知原级数条件收敛.

(9) 如果 $p \leqslant 0$ 通项不趋于 0, 原级数发散. 当 $p>0$ 时考虑

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} - \frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^{n+1}]^p} = (-1)^{n-1}\frac{[n+(-1)^{n-1}]^p - n^p}{n^p[n+(-1)^{n-1}]} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]^p - 1}{[n+(-1)^{n-1}]^p} = \frac{p+o(1)}{n[n+(-1)^{n-1}]^p} \sim \frac{p+o(1)}{n^{p+1}} \end{aligned}$$

即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛知原级数收敛. 又 $\frac{1}{[n+(-1)^{n-1}]^p} \sim \frac{1}{n^p}$, 故当 $p \in (0,1]$ 时原级数条件收敛, 当 $p \in (1,+\infty)$ 时原级数绝对收敛.

注: 其他解法参见蒲和平 P284 例 30.

(10) 如果 $p \leqslant 0$ 通项不趋于 0, 原级数发散. 当 $p>0$ 时考虑

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right] = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

当 $p \in (0,0.5]$ 时原级数发散, 当 $p \in (0.5,+\infty)$ 时级数收敛. 又有

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\left|\ln\left[1+\frac{(-1)^k}{k^p}\right]\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\ln\left[1-\frac{1}{(2k-1)^p}\right]\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|\ln\left[1+\frac{1}{(2k)^p}\right]\right|$$

等式右端前者等价 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^p}$, 后者等价 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^p}$, 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p} < +\infty$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^p} < +\infty$(即 $p>1$) 时可推得 S_{2n} 有界. 同理可知 S_{2n+1} 当且仅当 $p>1$ 时有界.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故当 $p\in(0.5,1]$ 时原级数条件收敛, 当 $p\in(1,+\infty)$ 时原级数绝对收敛. 其余情形原级数均发散.

注: 也可参见徐森林下册 P183 第 544 题 (1) 的解法.

(11) 由于

$$\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

而 $\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)\searrow 0$, 由 Leibniz 判别法原级数收敛. 但 $\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)\sim\frac{1}{\ln n}$, 因此原级数条件收敛.

(12) 由于 $n^{1/n}-1\searrow 0$, 由 Leibniz 判别法原级数收敛. 但

$$n^{1/n}-1=\exp\left[\frac{\ln n}{n}\right]-1\sim\frac{\ln n}{n}$$

故原级数非绝对收敛. □

2. 解答: 设所得新级数的通项记为 a_n, 则 $|a_n|=\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0. 记新级数的部分和为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. 当 $p>q$ 时, 有

$$\begin{aligned}
S_{m(p+q)}=&\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\cdots-\frac{1}{p+q}\right)\\
&+\left(\frac{1}{p+q+1}+\cdots+\frac{1}{2p+q}-\frac{1}{2p+q+1}-\cdots-\frac{1}{2(p+q)}\right)\\
&+\cdots\\
&+\left[\frac{1}{(m-1)(p+q)+1}+\cdots+\frac{1}{mp+(m-1)q}\right.\\
&\left.-\frac{1}{mp+(m-1)q+1}-\cdots-\frac{1}{m(p+q)}\right]\\
>&\frac{1}{p}+\frac{1}{2p+q}+\cdots+\frac{1}{mp+(m-1)q}>\frac{1}{p}+\frac{1}{3p}+\cdots+\frac{1}{(2m-1)p}\\
=&\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m-1}\right)\to+\infty\quad(m\to+\infty)
\end{aligned}$$

由于 $|a_n|\to 0(n\to+\infty)$, 故对 $0<l<p+q$, 有

$$S_{m(p+q)+l}=S_{m(p+q)}+[S_{m(p+q)+l}-S_{m(p+q)}]$$

后面括号中仅有 l 项, 当 $m\to+\infty$ 时, 极限为 0, 故此 $S_n(n=m(q+q)+l,0<l<p+q)\to+\infty(n\to+\infty)$, 新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_k$ 发散于 $+\infty$.

当 $p<q$ 时, 有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$
\begin{aligned}
&S_{m(p+q)+p}\\
=&\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)-\left[\left(\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{p+q}\right)-\left(\frac{1}{p+q+1}+\cdots+\frac{1}{2p+q}\right)\right]\\
&-\left[\left(\frac{1}{2p+q+1}+\cdots+\frac{1}{2p+2q}\right)-\left(\frac{1}{2p+2q+1}+\cdots+\frac{1}{3p+2q}\right)\right]\\
&-\cdots\\
&-\left\{\left[\frac{1}{mp+(m-1)q+1}+\cdots+\frac{1}{mp+mq}\right]-\left[\frac{1}{mp+mq+1}+\cdots+\frac{1}{(m+1)p+mq}\right]\right\}\\
<&S_p-\frac{1}{p+q}-\frac{1}{2(p+q)}-\cdots-\frac{1}{m(p+q)}\\
=&S_p-\frac{1}{p+q}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\longrightarrow-\infty(m\to+\infty)
\end{aligned}
$$

由于 $|a_n|\to 0(n\to+\infty)$, 故对 $0<l<p+q$ 有

$$S_{m(p+q)+p+l}=S_{m(p+q)+p}+[S_{m(p+q)+p+t}-S_{m(p+q)+p}]$$

后面括号中仅有 l 项, 当 $m\to+\infty$ 时, 极限为 0, 故此 $S_n(n=(p+q)+p+l,0<l<p+q)\to-\infty(n\to+\infty)$, 新级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 发散于 $-\infty$.

当 $p=q$ 时, 级数变为

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{2p}\right)+\left(\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{3p}\right)\cdots\cdots\\
=&\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left[\frac{1}{(k-1)p+1}+\cdots+\frac{1}{kp}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}A_k
\end{aligned}
$$

它为交错级数, 且

$$
\begin{aligned}
&A_k=\frac{1}{(k-1)p+1}+\cdots+\frac{1}{kp}>\frac{1}{kp+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)p}=A_{k+1}\\
&0<A_k<\frac{p}{(k-1)p+1}\longrightarrow 0\quad(k\to+\infty)
\end{aligned}
$$

根据 Leibniz 判别法, 此时级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{2p}\right)+\left(\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{3p}\right)-\cdots$$

收敛. 由命题 13.3.2 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

注: 其他证明方法参见徐森林下册 P188 第 547 题. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

3. 解答: 先证明一个引理 (徐森林第三册引理 12.3.3): 设 $a\in\mathbb{N}$, 当 $x\geqslant a$ 时函数 f 非负单调减, 则极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=a}^{n}f(k)-\int_a^n f(x)\mathrm{d}x\right)=\alpha$$

存在, 且 $0\leqslant\alpha\leqslant f(a)$. 更进一步, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 则

$$\left|\sum_{k=a}^{[\xi]}f(k)-\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x-\alpha\right|\leqslant f(\xi-1)$$

其中 $\xi\geqslant a+1$.

证: 令

$$\sum_{k=a}^{[\xi]}f(k)-\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x$$

这里 $a\in\mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}g(n)-g(n+1)&=-f(n+1)+\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant -f(n+1)+f(n+1)=0\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}g(n)&=\sum_{k=a}^{n-1}\left(f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right)+f(n)\\&\geqslant\sum_{k=a}^{n-1}(f(k)-f(k))+f(n)=f(n)\geqslant 0\end{aligned}$$

这说明 $\{g(n)\}$ 是一个非负单调减的数列且有下界 0. 因此,

$$\alpha=\lim_{n\to+\infty}g(n)=\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=a}^{n}f(k)-\int_a^n f(x)\mathrm{d}x\right]$$

存在且有限. 由于 $0\leqslant g(n)\leqslant g(a)=f(a)$, 故 $0\leqslant\alpha\leqslant f(a)$.

如果进一步假定 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 则

$$\begin{aligned}g(\xi)-\alpha&=\sum_{k=a}^{[\xi]}f(k)-\int_a^k f(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=a}^{n}f(k)-\int_a^n f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=\sum_{k=a}^{[\xi]}f(k)-\int_a^{[\varepsilon]}f(x)\mathrm{d}x-\int_{[\xi]}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=a}^{n}f(k)-\int_a^n f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=-\int_{[\xi]}^{k}f(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=[\xi]+1}^{n}f(k)-\int_{[\xi]}^{n}f(x)\mathrm{d}x\right)\\&=-\int_{[\xi]}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}[f(x)-f(k)]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}[f(k-1)-f(k)]\mathrm{d}x = f([\xi]) \leqslant f(\xi-1)$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} g(\xi)-\alpha &= -\int_{[\xi]}^{k} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}[f(x)-f(k)]\mathrm{d}x \\ &\geqslant -\int_{[\xi]}^{k} f(x)\mathrm{d}x \geqslant -(\xi-[\xi])f([\xi]) \geqslant -f([\xi]) \geqslant -f(\xi-1) \end{aligned}$$

于是

$$\left|\sum_{k=a}^{[\xi]} f(k) - \int_{a}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x - \alpha\right| = |g(\xi)-\alpha| \leqslant f(\xi-1)$$

引理证毕. 往证本题, 令 $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ 单调递减趋于 0, 于是利用引理有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}} - \int_{1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} - A\right| \leqslant f(n-1) = \frac{1}{(n-1)^{\alpha}}$$

其中, $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{\alpha}} - \int_{1}^{n}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}\right)$ 为常数. 而

$$\int_{1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

故有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}} - \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} - A\right| \leqslant \frac{1}{(n-1)^{\alpha}}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + A - \frac{1}{1-\alpha} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

记 $A-\dfrac{1}{1-\alpha}=\beta$ 就得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta + o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

再将重排后的新级数记为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n$, 对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 令 $m=\left[\dfrac{N}{p+q}\right]$, 则当 $N\to+\infty$ 时, $m\to+\infty$, 且有

$$m(p+q) \leqslant N < (m+1)(p+q)$$

$$S_N = \sum_{k=1}^{N}a_k = \sum_{k=1}^{m(p+q)}a_k + \sum_{k=m(p+q)+1}^{N}a_k$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

由于 $N-m(p+q)<p+q$, 故以上第 2 个和式中项数至多有 $p+q-1$ 项, 从而得

$$\left|\sum_{k=m(p+q)+1}^{N} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m(p+q)+1}^{N} |a_k| \leqslant (p+q)\frac{1}{[m(p+q)^{\alpha}]} = \frac{(p+q)^{1-\alpha}}{m^{\alpha}} \to 0(N \to +\infty, m \to +\infty)$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N} a_k = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{m(p+q)} a_k \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{(2k-1)^{\alpha}} - \sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{(2k)^{\alpha}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k^{\alpha}} - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k)^{\alpha}} - \frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{k^{\alpha}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k^{\alpha}} - \frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{k^{a}} - \frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{k^{\alpha}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{(2p)^{1-\alpha}\cdot m^{1-\alpha}}{1-a} + \beta + o\left(\frac{1}{(2mp)^{\alpha}}\right) - \frac{1}{2^{\alpha}}\frac{p^{1-\alpha}m^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\beta}{2^{\alpha}} - o\left(\frac{1}{(mp)^{\alpha}}\right)\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2^{\alpha}}\frac{q^{1-\alpha}m^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\beta}{2^{\alpha}} - o\left(\frac{1}{(mq)^{\alpha}}\right)\right\} \\
&= \lim_{m\to+\infty}\left\{\frac{2(pm)^{1-\alpha} - (pm)^{1-\alpha} - (qm)^{1-\alpha}}{2^{\alpha}(1-\alpha)} + \beta\left(1-2^{1-\alpha}\cdot\right) + o\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)\right\} \\
&= \lim_{m\to+\infty}\left[\frac{\left(p^{1-\alpha}-q^{1-\alpha}\right)m^{1-\alpha}}{2^{\alpha}(1-\alpha)} + \beta\left(1-2^{1-\alpha}\right) + o\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)\right] \\
&= \begin{cases} \beta(1-2^{1-\alpha}), p=q \\ +\infty, p>q \\ -\infty, p<q \end{cases}
\end{aligned}$$

即重排后的级数当且仅当 $p=q$ 时收敛. □

4. 解答:

(1) 记原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{p}}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{q}}$$

当 $p>1, q>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 都收敛, 由命题 13.3.3 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

当 $p>1, q\leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 发散, 由命题 13.3.3 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 同理, 当

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$p\leqslant 1,q>1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

当 $0<p=q\leqslant 1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为交错级数, 且 $\{|a_n|\}$ 单调递减趋于 0, 故级数收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散, 此时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

当 $0<p\neq q\leqslant 1$ 时, 将原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n)^q}\right]$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛. 当 $p\leqslant q$ 时, 由

$$\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n)^q}=\frac{(2n)^{q-p}-1}{(2n)^q}\geqslant\frac{2^{q-p}-1}{2^q}\cdot\frac{1}{n^q}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^q}$ 发散, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(2n)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}\right]$ 发散. 同理, 当 $p>q$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(2n)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}\right]$ 也发散. 所以此时原级数发散.

当 p,q 中有一个不大于 0 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, 故级数发散.

综上所述, 当 $p>1,q>1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $0<p=q\leqslant 1$ 时, 级数条件收敛. 其余情形级数发散.

注: 也可使用 Taylor 展开, 证明更为简洁, 参见周民强第二册 P248 例 3.3.20(2).

(2) 类似例题 13.3.2 可知

$$\begin{aligned}(-1)^n\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}&=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+p)}{kn^q}=(-1)^n\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{p}{k}\right)\right]\cdot\frac{1}{n^q}\\&=(-1)^n\frac{\exp\left[p\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}+\sum\limits_{k=1}^{n}O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)\right]}{n^q}\\&=(-1)^n\frac{\exp\left[C+p\ln n+o(1)\right]}{n^q}=(-1)^n\frac{e^{C+o(1)}}{n^{q-p}}\end{aligned}$$

当 $q>p+1$ 时级数绝对收敛. 当 $p<q\leqslant p+1$ 时条件收敛, 其余情形发散. □

5. 解答: 分以下几种情形讨论:

(1) 当 $x\in(1,+\infty)$ 时,n 充分大后有 $0<\dfrac{1}{1+nx^n}<\dfrac{1}{n^2}$, 原级数绝对收敛.

(2) 当 $x=1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n}$ 发散.

(3) 当 $x\in(-1,1)$ 时, $\dfrac{1}{1+nx^n}\to 1$, 原级数发散.

(4) 当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $\dfrac{1}{1+nx^n}=(-1)^n\dfrac{1}{(-1)^n+n(-x)^n}$. 当 n 充分大后 $\dfrac{1}{(-1)^n+n(-x)^n}$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

单调递减趋于 0, 故由 Leibniz 判别法原级数收敛. 又因为

$$\frac{1}{(-1)^n+n(-x)^n}\sim\frac{1}{n(-x)^n}<\frac{1}{n^2}$$

故原级数绝对收敛.

(5) 当 $x=-1$ 时, 类似上一种情况可知原级数条件收敛. □

6. 解答: 只需要证明

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$$

这等价于

$$a_1+a_2+\cdots+a_n-n(a_{n+1})>0$$

结合 a_n 单调递减的条件这是显然的. 由 Leibniz 判别法即原级数收敛. □

7. 解答: 只需要证明

$$\frac{1}{2k-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)>\frac{1}{2k+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)$$

变形得知这等价于证明

$$2(k+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+1>2k$$

这是显然的. 由 Leibniz 判别法即原级数收敛. □

8. 解答: 记 $B_n=b_1+\cdots+b_n$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n}a_nb_n=\sum_{k=1}^{n-1}B_k(a_k-a_{k+1})+B_na_n \tag{1}$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛 (设收敛于 b), 必然 B_n 有界, 设 $|B_n|\leqslant M$. 则由题设有

$$\sum|B_n(a_n-a_{n+1})|\leqslant M\sum|a_n-a_{n+1}|<+\infty$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n(a_n-a_{n+1})$ 收敛, 设它的极限为 a. 另一方面, 设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})=c$, 则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=c+a_1$$

于是由 (1) 式知

$$\sum_{n}^{\infty}a_nb_n=a+b(c+a_1)$$

命题得证. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

9. 解答: 记 $B_n = b_1 + \cdots + b_n$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_n b_n = \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1}) + B_n a_n \tag{1}$$

与上一题类似可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 且由题设可知 $B_n a_n \to 0$. 在 (1) 式两边令 $n \to \infty$ 即知命题成立. □

10. 解答: 令 $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) a_n$ 则 $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) b_n$. 由 $\left\{1 - \dfrac{1}{n+1}\right\}$ 单调有界, 若 $\sum b_n$ 收敛, 则由 Abel 判别法 $\sum a_n$ 收敛, 矛盾. □

11. 解答: 易见 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ 绝对收敛, 故

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (q^0 q^n + q^1 q^{n-1} + \cdots + q^n q^0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n$$

命题得证. □

12. 解答: 该级数与自身的 Cauchy 乘积为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{def}{=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{(-1)^i}{i+1} \cdot \frac{(-1)^j}{j+1} \right)$$

而

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^i}{i+1} \cdot \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^n}{(i+1)(j+1)} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{i+j=n} \left(\frac{1}{i+1} + \frac{1}{j+1} \right) = \frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \overset{def}{=\!=} \frac{2(-1)^n}{n+2} S_n \end{aligned}$$

容易验证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n+2} \overset{\text{stolz}}{=\!=} 0, \qquad \frac{S_n}{n+2} > \frac{S_{n+1}}{n+3}$$

由 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. □

13. 解答: 设 $S(x)C(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \cdot \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{i+j=n} \frac{(2n+1)!}{(2j)!(2i+1)!} \\ &= \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2i+1} = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot 2^{2n} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

即 $2S(x)C(x) = S(2x)$ 成立. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

14. 解答: 令 $x_n=\dfrac{a_n}{b_n}\to 0$, 则题意转为 $\sum x_n$ 与 $\sum x_n^2$ 收敛证 $\sum\dfrac{x_n}{1+x_n}$ 收敛. 注意到

$$\frac{x_n}{1+x_n}=\frac{x_n^2}{x_n(1+x_n)}=\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{1+x_n}\right)x_n^2=x_n-\frac{x_n^2}{1+x_n}$$

又注意到当 n 充分大时有 $0\leqslant\dfrac{x_n^2}{1+x_n}<\dfrac{x_n^2}{1/2}$, 结论显然.

注: 周民强第二册 P203 例 3.2.29(2) 方法有误, 原级数并非正项级数. □

15. 解答: 设这两个级数为 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$,Cauchy 乘积通项为 $c_{n+1}=\sum\limits_{i+j=n+1}a_ib_j>0$.

$$\begin{aligned}c_{n+1}&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\\&\quad+\cdots+\left(2+\frac{1}{2^2}\right)\left(-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right)+\left(-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-2^{n-1}-\frac{1}{2^n}-\cdots-2-\frac{1}{2^2}-1\right)\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}\right)<\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow\sum c_n<+\infty\end{aligned}$$

注: 事实上还可算出 $\sum c_n$ 的值, 参见徐森林下册 P198 第 555 题. □

16. 解答:

(1) 如 $a_n=1,b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$, 则 $c_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}},\sum c_n$ 发散. 而取 $a_n=0$, $b_n=1$, 则 $c_n=0,\sum c_n$ 收敛.

(2) 不妨设 $\sum b_n$ 发散, 令 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 反证 $\sum c_n$ 收敛, 再与 $\sum a_n$ 作 Cauchy 乘积, 有

$$\begin{aligned}c_n'&=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{n-j+1}\cdot\sum_{k=1}^{j}a_kb_{n-k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}a_k\sum_{j=k+1}^{n}a_{n-j+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}a_k\left(a_1+a_2+\cdots+a_{n-k}\right)=\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}a_kS_{n-k}>b_na_1S_{n-1}>b_na_1^2\end{aligned}$$

即 $\sum c_n'$ 发散, 矛盾. □

§13.4.3 练习题 学员: d39

1. 解答:

(1)$P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k+1}{k+2}}=\sqrt{\dfrac{2}{n+2}}\to 0(n\to\infty)$, 故无穷乘积发散.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2) 当 $x=-1$ 时不符合无穷乘积的定义; 当 $|x|>1$ 或 $x=1$ 时显然发散; 当 $|x|<1$ 时利用命题 13.4.1 的第 2 第 3 条性质,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n+1}$ 收敛, 故无穷乘积收敛.

(3) 我们有

$$\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}=\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\right)\right]$$

而

$$e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty)$$

故由命题 13.4.1 的第 2 条性质, 无穷乘积收敛.

(4) 因

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p=\exp\left[p\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{p+1}{n^2+p}\right)\right]\sim\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-p(p+1)}{n^2+p}\right]$$

无穷乘积收敛.

(5) 设 $a_n=1+(-1)^n\dfrac{1}{n}, n\geqslant 2$, 则

$$a_{2n}a_{2n+1}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

于是 $P_{2n+1}=a_2\cdots a_{2n+1}=1, P_{2n}=P_{2n-1}a_{2n}\to 1$, 无穷级数收敛.

(6) 由命题 13.4.1 的第 2 条性质, 只需要考察 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-1\right]$ 的敛散性.

利用 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的 Maclaurin 公式 (例题 7.2.4), 可得

$$\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1=-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

于是无穷乘积发散. □

2. 解答: 考虑

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a+n}{b+n}=\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{a-b}{b+n}\right)\right]\sim\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a-b}{b+n}\right]$$

当 $a=b$ 时值为 1; 当 $a>b$ 时值为 $+\infty$; 当 $a<b$ 时值为 0. □

3. 解答: 考虑

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos a_n=\exp\left[\ln\prod_{n=1}^{\infty}\cos a_n\right]=\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-a_n^2/2+o\left(a_n^2\right)\right)\right]\sim\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right]$$

结论显然. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

4. 解答: 由题意知 $a_n>0$. 因为

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r>0$$

所以当 n 充分大时,

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\frac{r}{2}>0,\quad \text{即}\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{r}{2n}>1$$

故 $\{a_n\}$ 单调递减. 再取 $0<\sigma<\frac{r}{2}$, 因为

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}-1\right]=\sigma<\frac{r}{2}$$

所以 $\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N$, 有

$$n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}-1\right]<\frac{\lambda}{2}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}<1+\frac{\lambda}{2n}<\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

即当 $n>N$ 时,

$$n^{\sigma}a_n>(n+1)^{\sigma}a_{n+1}>0$$

数列 $\{n^{\sigma}a_n\}$ 单调递减有下界, 因而收敛, 亦有界. 记 $0<n^{\sigma}a_n\leqslant M$, 则

$$0\leqslant a_n\leqslant\frac{M}{n^{\sigma}}\to 0(n\to\infty)$$

这说明 $a_n\to 0(n\to\infty)$. 由 Leibniz 判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. □

5. 解答: 考虑

$$\begin{aligned}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}&=\frac{1}{1+\gamma/n}\cdot\frac{1}{1+1/n}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\\&=\left(1-\frac{\gamma}{n}+o\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\\&=1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

于是 $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$ 的敛散性与 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}$ 相同.(命题 13.4.1 性质 2)

当 $\alpha+\beta-\gamma=1$ 时, 无穷乘积收敛, 否则发散.

注: 本问题的出题背景来源于超几何级数, 参见菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第二卷 P299(8). □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

6. 解答: 考虑

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

上式等号右端约分后即得结论. □

7. 解答: 设此 x 值为 x_0. 对任意 $x\neq x_0$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(x^2-1\right)\left(x^2-2^2\right)\cdots\left(x^2-n^2\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(x_0^2-1\right)\left(x_0^2-2^2\right)\cdots\left(x_0^2-n^2\right)\cdot\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-2^2\right)\cdots\left(x^2-n^2\right)}{\left(x_0^2-1\right)\left(x_0^2-2^2\right)\cdots\left(x_0^2-n^2\right)}\overset{def}{=\!=}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n\end{aligned}$$

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛, 而

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}=\frac{x-(n+1)^2}{x_0-(n+1)^2}$$

当 $x<x_0$ 时 $\beta_{n+1}>\beta_n$,$\{\beta_n\}$ 单调增, 当 $x>x_0$ 时 $\beta_{n+1}<\beta_n$,$\{\beta_n\}$ 单调减.

β_n 是无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2-n^2}{x_0^2-n^2}$ 的部分积, 若该无穷乘积收敛, 则 $\{\beta_n\}$ 有界. 而

$$p_n=\frac{x^2-n^2}{x_0^2-n^2}=1+\frac{x_0^2-x^2}{n^2-x_0^2}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_0^2-x^2}{n^2-x_0^2}$ 收敛, 由此推得 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2-n^2}{x_0^2-n^2}$ 收敛,$\{\beta_n\}$ 有界. 根据 Abel 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ 收敛, 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(x^2-1\right)\left(x^2-2^2\right)\cdots\left(x^2-n^2\right)$ 对任何 x 值都收敛. □

8. 解答: 由于当 n 充分大后级数通项不再变号, 不妨设级数通项始终为正. 考虑

$$\frac{n!a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{a_n}{n^x}\cdot\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\overset{def}{=\!=}\frac{a_n}{n^x}\cdot b_n$$

我们只需要证明 $\{b_n\}$ 单调有界, 就可以由 Abel 判别法推出两级数对相同 x 收敛.

由

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n}&=\frac{(n+1)\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^x}{x+n+1}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\dfrac{x+1}{n}}\\&=\left[1+\frac{x+1}{n}+\frac{(x+1)x}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[1-\frac{x+1}{n}+\frac{(x+1)^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=1+\frac{(x+1)x}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

可知对固定的 x,$\{b_n\}$ 单调.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

另一方面, 由 Euler-Gauss 公式 (13.38) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \Gamma(x)$, 因而有界. 由此命题得证. □

9. 解答: 设 $c_n = \dfrac{n}{n+1}O(b_n)$, 即 $\exists M, s.t.$

$$|c_n|\frac{n+1}{n} \leqslant M|b_n|$$

于是

$$|c_n| \leqslant \frac{n}{n+1}M|b_n| < M|b_n|$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|$ 收敛, 从而 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|c_n|)$ 收敛, 于是由命题 13.4.1 第 5 条性质可知 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_n)$ 收敛. 令 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_n) = c \neq 0$, 就有

$$\begin{aligned}
&\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n} + O\left(b_n\right) = \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{n}{n+1}O\left(b_n\right)\right) = \frac{n+1}{n}\left(1+c_n\right)\\
&\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{1+c_n}\\
&\frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+c_n}\cdot\frac{1}{1+c_{n-1}}\cdots\frac{1}{1+c_1}\\
&\qquad = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+c_k\right)}
\end{aligned}$$

于是有

$$\frac{\frac{a_{n+1}}{1}}{n+1} = \frac{a_1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+c_k\right)} \longrightarrow \frac{a_1}{c} \quad (n\to+\infty)$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

10. 解答: 令 $a_n = \dfrac{n!}{n\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$, 则

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)\cdot\frac{en^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$\ln b_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

故 $\sum\ln b_n$ 收敛, 于是 $a_n = a_1\prod\limits_{n=1}^{n}b_n$ 亦收敛. 求极限可参照 (11.36). □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§13.5.2　参考题　学员: d39

第一组参考题　学员: d39

1. 解答:

证法一: 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{(1+a_1)\cdots(1+a_i)}&=\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{i-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_i)}\right]\\&=\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty,\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 或者为有限数或者为 $+\infty$, 故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$ 收敛, 其通项极限自然为 0.

证法二: 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=0$, 则 $\varphi(n)=\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}\leqslant a_n\to 0(n\to\infty)$.

若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=M>0$.

(i)M 有限, 则 $\exists\{a_{k_n}\}\subset\{a_n\}$ 使得 $\exists N>0,\forall n\geqslant N_1,a_{k_n}\geqslant\frac{M}{2}$. 当 $n\to\infty$ 时, 满足 $1\leqslant k_n\leqslant n$ 的 k_n 的个数 k 是无穷多的. 即

$$\varphi(n)\leqslant\frac{a_n}{1+a_n}\cdot\left(1+\frac{M}{2}\right)^{-k}\to 0(n\to\infty)$$

(ii)$M=+\infty$, 取 $\{a_n\}$ 的递增无界子列 $\{a_{p_m}\}$, 则对某一 p_r, 有 $a_{p_m}\geqslant a_{p_r}$. 当 $n\to\infty$ 时, 有 k 个 p_m 介于 p_r 与 $n-1$ 间, 即 $k\to\infty$. 故

$$\varphi(n)\leqslant\frac{a_n}{1+a_n}\cdot(1+a_{p_r})^{-k}\to 0(n\to\infty)$$

综上所述, $\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=0$. □

2. 解答: 在练习题 13.2.5 第 8 题中已作解答. 反例可举 $\overline{1^2+\cdots+1/3^2}+1/4+\overline{1/5^2+\cdots+1/8^2}+1/9+\overline{1/10^2+\cdots+1/15^2}+1/16+\cdots\cdots$, 则 $a_n\neq o(1/n)$. □

3. 解答: 易知 $\left\{\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right\}$ 也单调递减趋于 0, 由上题结论可知 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_n/\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=0$$

由此可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛. □

4. 解答: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})$, 由 Abel 变换得到 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}$.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 利用第 2 题的结论, 上式两边令 $n\to\infty$, 即得 S_n 收敛;

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

如果 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{n+1})$ 收敛, 则存在 M 使得 $S_n\leqslant M$. 注意到当 $n<m$ 时有

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{m+1})\leqslant\sum_{k=1}^{m}(a_k-a_{m+1})\leqslant M$$

令 $m\to\infty$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{m+1})\leqslant M$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.(显然当其中之一收敛时两方得和相同)

注: 若缺少通项单调递减的条件, 可举反例 $a_n=\begin{cases}1/n, n=k^2\\ 0, n\neq k^2\end{cases}(k\in\mathbb{N})$. □

5. 解答:

(1)$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n+1}+\ln\dfrac{n}{n+1}\sim-\dfrac{1}{2(n+1)^2}$, $\{a_n\}$ 收敛.

(2)$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+2(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\sim\dfrac{1}{4n^{3/2}}$, $\{a_n\}$ 收敛.

(3)$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ln\left[\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]\sim-\dfrac{1}{2(n+1)^2\ln(n+1)}$. $\{a_n\}$ 收敛. □

6. 解答:

(1) 参见第十一章第一组参考题第 10 题.($0\leqslant A\leqslant f(1)$ 是因为单调性)

(2) 取 $f(y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, 则 $f(1)=\dfrac{x}{x^2+1}\to0(x\to+\infty)$. 于是由 $0\leqslant A\leqslant f(1)$ 可知 $A=0$. 再计算

$$\int_1^n f(y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\to\frac{\pi}{2}(x\to+\infty)$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_1^{+\infty}f(y)\mathrm{d}y+A\right)=\frac{\pi}{2}$$

命题得证. □

7. 解答:

必要性: 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 则 $a_n\to0(n\to\infty)$. 注意到 $x=0$ 处的连续性, 可知

$$0=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)$$

为证 $f'(0)=0$, 假定 $f'(0)=a\neq0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{1/n}=\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=|f'(0)|=|a|\neq0$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 矛盾.

充分性: 考虑 a_n 的 Taylor 展开式

$$a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + f'(0)\frac{1}{n} + \frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \to \infty)$$

即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. □

8. 解答:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1) - f(n)] = \lim\limits_{n\to\infty}[f(n+1) - f(1)] = f(+\infty) - f(1) = A - f(1).$

(2) 由 $f''(x) < 0$ 知 $f'(x)$ 递减. 而 $f(x)$ 递增, 故 $f'(x) > 0$. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 同敛散. 而

$$\int_1^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty}\int_1^{M} f'(x)\mathrm{d}x = [f(+\infty) - f(1)] = A - f(1)$$

命题得证.

注: 其他解法参见周民强第二册 P180 例 3.2.3(1). □

9. 解答: 第一个等号显然, 主要证第二个等号. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, 则显然有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \leqslant A$. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n,k}$ 收敛. 其次, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0 使得

$$\left|A - \sum_{n=1}^{N_0} a_n\right| = \left|\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$$

让 n 与 m 充分大, 使得 $a_1, a_2, \cdots, a_{N_0}$ 都处于矩阵 (将 a_n 按矩阵任意排列) 的前 n 行与前 m 列之中. 即可取充分大的 n_0 与 m_0, 使得当 $n > n_0, m > m_0$ 时

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{n=1}^{m} a_{n,k} - \sum_{n=1}^{N_0} a_n\right| \leqslant \left|A - \sum_{n=1}^{N_0} a_n\right| < \varepsilon$$

令 $m \to \infty$ 可得 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n,k} - \sum\limits_{n=1}^{N_0} a_n\right| \leqslant \varepsilon$. 这样就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} - A\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} - \sum_{n=1}^{N_0} a_n + \sum_{n=1}^{N_0} a_n - A\right| < 2\varepsilon$$

由 ε 的任意性命题得证.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

注: 其他证明方法参见梅加强 P298 推论 8.4.3. □

10. 解答: 由上题的结论可知.

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^m}=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{n^m}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1$$

命题得证. □

11. 解答: 设 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_n)\leqslant M$. 则当 $n<m$ 时有

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_m)\leqslant\sum_{k=1}^{m}(a_k-a_m)\leqslant M$$

令 $m\to\infty$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_m)\leqslant M$$

即 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 有界, 因而收敛. □

12. 解答: 由题设知 $\{a_n-a_{n+1}\}\searrow 0$, 故 $a_n\geqslant a_{n+1}$, 即 $a_n\searrow 0$. 注意到

$$\begin{aligned}0\leqslant\frac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}&\leqslant\frac{a_n^2}{a_n-a_{n+1}}=\frac{1}{a_n-a_{n+1}}\sum_{k=n}^{\infty}\left(a_k^2-a_{k+1}^2\right)\\&\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k^2-a_{k+1}^2}{a_k-a_{k+1}}=\sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}\to+\infty$$

命题得证. □

13. 解答: 易证 $na_n\searrow 0$, 否则 $na_n\geqslant a_1\Rightarrow a_n\geqslant\dfrac{a_1}{n}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 矛盾.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 依 Cauchy 准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 当 n 充分大时有

$$\varepsilon>\sum_{k=[\sqrt{n}]}^{n}ka_k\cdot\frac{1}{k}\geqslant na_n\sum_{k=[\sqrt{n}]}^{n}\frac{1}{k}\geqslant na_n\int_{\sqrt{n}}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}na_n\ln n$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n\ln n=0$.

注: (1) 其他解法参见周民强第二册 P182 例 3.2.7(1).

(2) 可将本题与练习题 12.4.2 第 4 题进行对比. □

14. 解答: 用数学归纳法易证 $\dfrac{a_{n+1}^{-1}}{a_n^{-1}}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant\dfrac{2}{3}<1$(徐森林下册 P217 第 578 题), 由 D'Alembert 判别法知级数收敛.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

事实上, 由熟知的 Fibnonacci 数列通项公式

$$a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

可求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

注: Fibnonacci 数列前后项比的极限为黄金比例, 在股市中具有应用价值. 与 Fibnonacci 数列对应的还有 Pell 数列, 其递推公式为

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n, a_1=0, a_1=1$$

可求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$(白银比例), 因此 Pell 数列的倒数构成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 也收敛. □

15. 解答: 由题设有

$$a_{n+1}+a_{n+1}a_n^p=a_n$$

故 $a_n>a_{n+1}$ 且有

$$a_{n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^p}<\int_{a_{n+1}}^{a_n}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k+1}}^{a_k}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{n\to\infty}\int_{a_{n+1}}^{a_1}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\int_0^{a_1}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}<+\infty$$

即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n$ 收敛. □

16. 解答: 由基本不等式得

$$0\leqslant\frac{\sqrt{a_n}}{n^p}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

而由题设知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2p}}$ 均收敛. 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ 收敛.

注: 当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, 可以取反例 $a_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}$. □

17. 解答:

(1) 在例题 2.2.7 中已经证明 $\{\sin n\}$ 发散, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$ 发散.

(2) 关键需要证明 $\{\sin n^2\}$ 发散 (或者不趋于 0), 在此先给出一个引理 (第三章第二组参考题第 9 题引理的加强), 再给出本题的六种证明.

(主要想借助本题来讨论稠密性, 读者觉得繁琐想直接知道本题答案可跳到证法五)

引理: 若 a,b不可公度, 则集合 $S=\{ma+nb|m,n\in\mathbb{Z}\}$, 在实数轴上稠密.(不可公度的意义是不存在实数 c 使得 a/c 与 b/c 都是整数)

证: 不失一般性, 假定 $a>b$. 设定整系数的辗转相除如下:

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$
\begin{aligned}
a &= [a/b]b + r_1 = q_1 b + r_1 \\
b &= [b/r_1]\, r_1 + r_2 = q_2 r_1 + r_2 \\
r_1 &= [r_1/r_2]\, r_2 + r_3 = q_3 r_2 + r_3 \\
&\cdots\cdots \\
r_{j-2} &= [r_{j-2}/r_{j-1}]\, r_{j-1} + r_j = q_j r_{j-1} + r_j \\
&\Rightarrow r_j = ma + nb \in S, \quad \text{这里} m, n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

首先, 这个序列是无穷尽的, 因为如果 $r_j = 0$ 终止的话, 就可以得到 a, b 均是 r_{j-1} 的整数倍从而可公度. 其次,$r_1 > r_2 > \cdots > r_j$. 因此, 若 $r_{j-1} < r_{j-2}/2$, 则 $r_j < r_{j-1} < r_{j-2}/2$; 若 $r_{j-1} > r_{j-2}/2$, 则 $r_j = r_{j-2} - r_{j-1} < r_{j-2}/2$. 总之 $r_j < r_{j-2}/2$. 从而 r 序列收敛到零. 对任何 $x \in \mathbb{R}, (x - r_j, x + r_j)$ 内都至少存在一个数 $kr_j = kma + knb \in S$, 由于 $r_j \to 0$, 集合 S 在实轴上稠密. 引理证毕.

推论 (i): 集合 $\{ma + 2n | a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z}\}$ 在实轴上稠密.

推论 (ii): 集合 $\{ma + 2n + 1 | a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z}\}$ 在实轴上稠密.(实轴平移一个单位稠密性质不变)

推论 (iii):$\{\sin(2n+1)\}$ 在 $[-1, 1]$ 上稠密.(这也说明了 $\{\sin(2n+1)\}$ 发散)

证: 类似第三章第二组参考题第 9 题的证明, 由推论 (ii) 对任意 $r \in [-1, 1], \exists m, n \in \mathbb{Z}$ 使得

$$|2m\pi + 2n + 1 - \arcsin r| < \varepsilon$$

于是

$$|\sin(2n+1) - r| = |\sin(2m\pi + 2n + 1) - \sin(\arcsin r)| \leqslant |2m\pi + 2n + 1 - \arcsin r| < \varepsilon$$

推论 (iv):$\{\cos(2n+1)\}$ 在 $[-1, 1]$ 上稠密.

证: 即 $\{\cos(2n+1)\}$ 的导集为 $[-1, 1]$. 任给 $r \in [-1, 1]$, 对于 $\sqrt{1 - r^2} \in [-1, 1]$, 由集合 $\{\sin(2n+1)\}$ 的稠密性, 存在子列 $\{\sin(2n_k + 1)\}$ 的极限为 $\sqrt{1 - r^2}$, 由三角恒等式

$$\sin^2(2n+1) + \cos^2(2n+1) = 1$$

可得到 $\cos\{(2n_k + 1)\}$ 的极限为 r.

现在来证明本题.

证法一: 若 $\sin n^2 \to 0$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \exists k \in \mathbb{Z}, |n^2 - k\pi| < \varepsilon$.

令 $a_n = n^2 \bmod \pi \left(-\dfrac{\pi}{2} < a_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right), b_n = 2n + 1 \bmod \pi \left(-\dfrac{\pi}{2} < b_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$. 则

$$|a_{n+1} - a_n| = |b_n| < 2\varepsilon$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n+1) = 0$, 这与推论 (iii) 矛盾. 因此 $\sin n^2 \not\to 0$, 命题得证.

证法二: 如果 $\sin n^2 \to 0$, 则 $n^2 \bmod \pi \to 0$. 于是存在 N, 对 $\forall n > N$ 都满足 $0 \leqslant n^2 \bmod \pi < 0.01$. 于是 $n^2 = k_1\pi + \delta_1, (n+1)^2 = k_1\pi + \delta_1 + (2n+1) = k_2\pi + \delta_2, (n+2)^2 = k_1\pi + \delta_1 + (4n+4) = k_3\pi + \delta_3$, 其中 $-0.01 < \delta_i < 0.01, i = 1,2,3$. 这说明 $2n+1 = (k_2 - k_1)\pi + (\delta_2 - \delta_1), 2n+3 = (k_3 - k_2)\pi + (\delta_3 - \delta_2)$, 也就是 $2 = (k_3 - 2k_2 + k_1)\pi + (\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)$, 由于 k_i 是整数, $\delta_i \in (-0.01, 0.01), i = 1,2,3$, 这显然是不可能的. 命题得证.

证法三: 假设 $\sin n^2$ 收敛, 则可知 $|\sin n^2|$ 和 $|\cos n^2|$ 均收敛, 设它们的极限分别为 α 和 β. 则 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. 由和角公式

$$\cos(n+1)^2 = \cos\left(n^2 + 2n + 1\right) = \cos n^2 \cos(2n+1) - \sin n^2 \sin(2n+1)$$

所以

$$\left|(1 - \cos(2n+1))\cos n^2 + \cos(n+1)^2 - \cos n^2\right| = \left|\sin n^2 \sin(2n+1)\right|$$

由于当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&\left|(1 - \cos(2n+1))\cos n^2 + \cos(n+1)^2 - \cos n^2\right| = \left|(1 - \cos(2n+1))\cos n^2 + o(1)\right| \\
=&\left|(1 - \cos(2n+1))\cos n^2\right| + o(1) = (\alpha + o(1))(1 - \cos(2n+1)) + o(1) \\
=&\alpha(1 - \cos(2n+1)) + o(1) \\
&\left|\sin n^2 \sin(2n+1)\right| = (\beta + o(1))|\sin(2n+1)| = \beta|\sin(2n+1)| + o(1)
\end{aligned}$$

可得

$$\alpha(1 - \cos(2n+1)) = \beta|\sin(2n+1)| + o(1)$$

利用 $\{\cos(2n+1)\}$ 的导集为 $[-1,1]$, 对任何 $s \in [-1,1]$, 对上式在子列意义上求极限可得: $\alpha(1-s) = \beta\sqrt{1-s^2}$. 取 $s = -1$ 得 $\alpha = 0$, 再取 $s = 0$ 得 $\beta = 0$, 与 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ 矛盾.

证法四 (*): 正如第三章第二组参考题第 9 题注中提及的, $\{\sin n^k\}(k \in \mathbb{Z}^+)$ 在 $[-1,1]$ 上稠密, 可知 $\{\sin n^k\}$ 是发散的.

证法五 (最简单): 仿照周民强第二册 P172 例 3.1.14(3), 这个证法可以证明 $\sin(n^k) \not\to 0$.

证法六: 利用 Cauchy 准则和 Dirichlet 逼近定理. 仿照周民强第二册 P172 例 3.1.14(4).

注: 推论 (i)(ii) 也可以绕开引理直接证明, 因为事实上在第三章第二组参考题第 9 题中我们已经得到 $\{\{ma\}|a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}\}$ 在 $[-1,1]$ 上稠密. 那么任取 $r \in \mathbb{R}$, 不妨设 $[r]$ 是偶数. 可以先找到 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $\{ma\} \to \{r\}$, 然后根据此 m

(1) 如果 $[ma]$ 是偶数, 那么存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $[ma] + 2n = [r]$, 则

$$ma + 2n = [ma] + 2n + \{ma\} \to [r] + \{r\} = r$$

这就证明了推论 (i), 再平移实轴得到推论 (ii).

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2) 如果 $[ma]$ 是奇数, 那么存在 $n\in\mathbb{Z}$ 使得 $[ma]+2n+1=[r]$, 从而

$$ma+2n+1=[ma]+2n+1+\{ma\}\to[r]+\{r\}=r$$

这就证明了推论 (ii), 再平移实轴得到推论 (i).

对于 $[r]$ 为奇数的情形, 可以类似进行证明. □

18. 解答:

(1) 注意到 $\dfrac{a_n}{1+n^2a_n}\leqslant\dfrac{a_n}{n^2a_n}=\dfrac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛.

(2) 若取 $a_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 发散; 若取

$$a_n=\begin{cases}1, & n=m^2\\ 1/n^2, & \text{其他}\end{cases}\quad(m\in\mathbb{Z}^+)$$

则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散但 $\displaystyle\sum_n\frac{a_n}{1+na_n}<\sum_m\frac{1}{1+m^2}+\sum_n\frac{1}{n(n+1)}<+\infty$, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 收敛.

(3) 若存在 $M>0$ 使得 $a_n<M$, 则 $\dfrac{a_n}{1+a_n}\geqslant\dfrac{a_n}{1+M}$ 可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散. 否则, 存在子列 $a_{n_k}\to+\infty$, 则 $\dfrac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}}\to1$, 由级数收敛的必要性可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散.

(4) 若取 $a_n=\dfrac{1+n}{n^2}$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$ 收敛; 若取 $a_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$ 发散. □

19. 解答:

(1) 记 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$, 则由 Abel 变换可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{nS_n-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}S_k}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(S_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k/n\right)\overset{\text{stolz}}{=\!=}S-S=0$$

(2) 记 $b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)b_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{b_{k-1}}{k}\\&=b_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{b_k-b_{k-1}}{k}-\frac{b_n}{n+1}=b_1+\sum_{k=2}^{n}a_k-\frac{b_n}{n+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n+1}\to S\end{aligned}$$

□

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

20. 解答: 假设存在这样的 N, 使得对所有 n 都有 $|n-f(n)|\leqslant N$. 设原级数的部分和为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 新级数部分和为 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{f(k)}$, 则对任何给定的 $n>N$, 考察含有 N 个项的和 $U(n)=T_{n+N}-S_n$.

(1) 断言 $U(n)$ 中一定没有 S_n 的项. 这是因为对 $k=1,2,\cdots,n$,

$$a_k\in\{a_{f(1)},a_{f(2)},\cdots,a_{f_{(k+N)}}\}\subset\{a_{f(1)},a_{f(2)},\cdots,a_{f_{(k+N)}},\cdots,a_{f(n+N)}\}$$

这也说明 $U(n)$ 内只含有 T_{n+N} 中的项.

(2) 断言 $U(n)$ 中一定没有 T_{n-N} 的项, 因为对 $k=1,2,\cdots,n-N$,

$$a_{f(k)}\in\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+N}\}\subset\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+N},\cdots,a_n\}$$

这就说明 $U(n)$ 中只含有 $\{a_{f(n-N+1)},a_{f(n-N+2)},\cdots,a_{f(n+N)}\}$ 中的 N 项. 设这 N 个项为 $b_{n_1},b_{n_2},\cdots,b_{n_N}$. 于是对任给 $\varepsilon>0$, 因为已知 T_n 收敛, 因此可使 n 充分大后 $|b_{n_k}|<\dfrac{\varepsilon}{N},(k=1,2,\cdots,N)$. 则

$$|T_{n+N}-S_n|=|b_{n_1}+b_{n_2}+\cdots+b_{n_N}|\leqslant|b_{n_1}|+|b_{n_2}|+\cdots+|b_{n_N}|<N\cdot\frac{\varepsilon}{N}=\varepsilon$$

即当 $n\to\infty$ 时 $|T_{n+N}-S_n|\to0$. 但另一方面 $|T_{n+N}-S_n|\to|t-s|\neq0$, 矛盾. 因此假设不成立, 原命题得证. □

第二组参考题　学员: d39

1. 解答: 我们证明推广结论:

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n^{p-1}}$ 收敛, $p>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^p}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}a_n$ 收敛.

证: 设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 则

$$\frac{n^pa_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}=\frac{n^p}{S_n^p}(S_n-S_{n-1})$$

其中 $S_0=0$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{n^p}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}a_n&<a_1^{1-p}+\sum_{n=2}^{m}\frac{n^p}{S_{n-1}^{p-1}}-\sum_{n=2}^{m}\frac{n^p}{S_n^{p-1}}\\&=a_1^{1-p}+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(n+1)^p}{S_n^{p-1}}-\sum_{n=2}^{m}\frac{n^p}{S_n^{p-1}}\\&=2a_1^{1-p}+\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^p-n^p}{S_n^{p-1}}<2a_1^{1-p}+p\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^{p-1}}{S_n^{p-1}}\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

取 $r=\dfrac{p}{p-1}, s=p$, 那么 $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=1$, 则由 Hölder 不等式得到

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^{p-1}}{S_n^{p-1}}=\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^{p-1}}{S_n^{p-1}}a_n^{\frac{p-1}{p}}\cdot\frac{1}{a_n^{\frac{p-1}{p}}}<\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^p}{S_n^p}a_n\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

又

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n^p}{S_n^p}a_n<2a_1^{1-p}+p2^{p-1}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{n^p}{S_n^p}a_n\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

由 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{p-1}}$ 收敛, 用反证法知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}a_n$ 也收敛.

注: 令 $p=2$ 即本题, 也可参看裴礼文 P453 例 5.1.28 或徐森林下册 P218 第 579 题. □

2. 解答: 记 $S_n=a+a_1+\cdots+a_n$, 则 $\dfrac{a_n}{S_n^{3/2}}=\dfrac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{3/2}}$. 类似例题 13.2.5, 应用 Lagrange 中值定理, 可得到

$$\frac{a_n}{S_n^{3/2}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{3/2}}<\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{S_n^{p-1}}\right)$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^{3/2}}&=\frac{a_1}{(a+a_1)^{3/2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{S_k^{3/2}}<\frac{a_1}{(a+a_1)^{3/2}}+2\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{S_{k-1}^{1/2}}-\frac{1}{S_k^{1/2}}\right)\\&<\frac{a_1}{(a+a_1)^{3/2}}+\frac{2}{(a+a_1)^{1/2}}<\frac{2}{\sqrt{a}}\end{aligned}$$

(最后一个小于号是直接去化简验证)

由极限的保号性, $S\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{a}}$ 得证. □

3. 解答: 固定 k, 由题意有

$$a_k\leqslant Ma_{k+1}, a_k\leqslant Ma_{k+2}, \cdots, a_k\leqslant Ma_{2k}$$

$$ka_k\leqslant M(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k})$$

两边令 $k\to\infty$, 由 Cauchy 准则, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. □

4. 解答: 取

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{2^{2^k}}, b_n=\dfrac{1}{2^{2^{k+1}}}, 2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant 2^{2^k}-1, k=2m\\ a_n=\dfrac{1}{2^{2^{k+1}}}, b_n=\dfrac{1}{2^{2^k}}, 2^{2^{k-1}}\leqslant n\leqslant 2^{2^k}-1, k=2m-1\end{cases}$$

当 $n\geqslant 2$ 时上式都有意义, 且显然

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2m}}}\left(2^{2^{2m}} - 2^{2^{2m-1}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\right) = \infty$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\left(2^{2^{2m-1}} - 2^{2^{2m-2}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{2^{2m-2}}}\right) = \infty$$

因此 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ 都发散, 但 $\min\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2^{2^{k+1}}}$, $2^{2^{k-1}} \leqslant n \leqslant 2^{2^k} - 1$, 因此

$$\sum_{n=2}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2k+1}}}\left(2^{2^k} - 2^{2^{k-1}}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2k+1}}} 2^{2^k} = \frac{1}{2^{2^k}} < \infty$$

再比如取

$$\sum a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \overline{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{14^2} + \overline{\frac{1}{15^2} + \frac{1}{15^2} + \cdots + \frac{1}{15^2}} + \cdots$$

$$\sum b_n = \frac{1}{1^2} + \underline{\frac{1}{2^2}} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \underline{\frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2}} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{16^2} + \cdots + \frac{1}{71^2} + \cdots$$

其中重复数的个数要使得每段和不小于 $\frac{1}{4}$, 而显然 $\sum \min\{a_n, b_n\} = \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$. □

5. 解答: 若 $\lambda < e^{-1}$, 则存在 $N, p > 1$ 使得当 $n \geqslant N$ 时有

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n < \frac{1}{e^p} < \frac{1}{(1+1/n)^{np}}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p}$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} < \frac{a_1}{n^p}$$

由比较判别法知级数收敛.

若 $\lambda > e^{-1}$, 此时存在 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时有

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n > \frac{1}{e} > \frac{1}{(1+1/(n-1))^n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n-1}{n} = \frac{1/n}{1/(n-1)}$$

$$\Rightarrow a_n = a_2 \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_3}{a_2} > \frac{a_2}{n}$$

由比较判别法知级数发散. □

6. 解答: 若 $p > 1$, 则 $\exists A > 1$, 使得 $x > A$ 时

$$\frac{e^x f(x)}{f(x)} > 1 \Rightarrow e^x f(e^x) > f(x)$$

从而 $\forall x_{n-1} < x_n$, 有

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x < \int_{x_{n-1}}^{x_n} e^x f\left(e^x\right)\mathrm{d}x = \int_{e^{x_{n-1}}}^{e^{x_n}} f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

取 $x_{n+1}=e^{x_n}, x_1=1$, 则由 (1) 式可得

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x > \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_1^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x > n\int_1^e f(x)\mathrm{d}x \to +\infty$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

若 $p<1$, 取实数 $q:\lambda<q<1$. 由已知条件知 $\exists A>1$, 使得 $x>A$ 时有

$$\frac{e^x f(x)}{f(x)} < q \Rightarrow e^x f(e^x) < qf(x)$$

类似上面的推理可知

$$\int_1^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x < \sum_{k=2}^{n-1} q^{k-1}\int_1^e f(x)\mathrm{d}x < \frac{\int_1^e f(x)\mathrm{d}x}{1-q} < +\infty$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. □

7. 解答: 由 b_n 的定义与 $a_n \searrow 0$ 可知当 $n\to\infty$ 时 $b_n\to\infty$ 且有

$$a_k \begin{cases} \geqslant 2^{-n}, k\leqslant b_n \\ < 2^{-n}, k > b_n \end{cases}$$

故对 $k=1,2,\cdots,n$ 有

$$(b_{k+1}-b_k)2^{-k-1} \leqslant a_{b_k+1}+a_{b_k+2}+\cdots+a_{b_{k+1}} \leqslant (b_{k+1}-b_k)2^{-k}$$

将这 n 个式相加可得

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)2^{-k-1} \leqslant a_{b_1+1}+a_{b_1+2}+\cdots+a_{b_{n+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)2^{-k}$$

对两边使用 Abel 变换可得

$$\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} b_k 2^{-k} + b_{n+1}2^{-n-1} - b_1 2^{-2} \leqslant \sum_{k=b_1+1}^{b_{n+1}} a_k \leqslant \sum_{k=2}^{n} b_k 2^{-k} + b_{n+1}2^{-n} - b_1 2^{-1}$$

因为 $b_n\to\infty$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n 2^{-n}$ 同敛散.

注: 从证明过程来看, 2 并没起到作用, 将 2 改为其他正整数结论依旧成立. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

8. 解答:

(1) 参见第二章练习题 2.5.5 的第 9 题.

(2) 这个无穷乘积的通项可以写成

$$\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}\cdot\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}\cdots\frac{2^n-2}{2^n-1}\cdot\frac{2^n}{2^n-1}=\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(2^{n-1}-1)!!\,(2^n)!!}{(2^{n-1})!!\,(2^n-1)!!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}$$

不难归纳得到

$$\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(2^{k-1}-1)!!\,(2^k)!!}{(2^{k-1})!!\,(2^k-1)!!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^k}}=\left\{2^{n2^n+1}\left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}$$

再应用 Stirling 公式得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(2^{n-1}-1)!!\,(2^n)!!}{(2^{n-1})!!\,(2^n-1)!!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}=2\lim_{n\to\infty}\left\{2^{n2^n+1}\left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}\\&=\lim_{n\to\infty}2\cdot2^{n+2^{-n}}\cdot\left[\frac{\sqrt{\pi2^n}\left(\dfrac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^{n-1}}}{\sqrt{\pi2^{n+1}}\left(\dfrac{2^n}{e}\right)^{2^n}}\right]^{\frac{1}{2^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}2^{n+1}\cdot\frac{2^{n-1}}{2^{2n}}\cdot e=e\end{aligned}\qquad\square$$

9. 解答: 我们证明, 对任意实数 b 和 $p\leqslant1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(b\ln n)}{n^p}$ 都是发散的.

如果 $b=0$ 这个级数显然发散. 取 $b\neq0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|b|\ln n=\infty$ 且

$$\lim_{n\to\infty}[b\ln(n+1)-b\ln n]=0$$

因此对任意 $M\in\mathbb{Z}_+$, 存在充分大的 $k\in\mathbb{Z}_+$, 使得至少有 M 个 $|b|\ln n$ 的相继值处于 $\left(k-\dfrac{1}{3}\right)\pi$ 和 $\left(k+\dfrac{1}{3}\right)\pi$ 之间. 对于所有这些值,$\cos(b\ln n)$ 同号且 $|\cos(b\ln n)|>\dfrac{1}{2}$. 因此, 就绝对值而言此级数对应的 M 个相继的项的和将会大于级数 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=q}^{q+M}n^{-p}$($q$ 为某个整数). 因为对于适当选择的 $M\in\mathbb{Z}_+$, 这个和可以任意大, 于是这级数不满足 Cauchy 收敛准则, 级数发散. $\square$

10. 解答:

(1) 考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_{n+k}=\sum_{n=k+1}^{\infty}(n-k)a_n=\sum_{n=k+1}^{\infty}na_n\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

因为 $\left\{1-\dfrac{k}{n}\right\}$ 单调有界, $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty}na_n$ 收敛, 故由 Abel 判别法级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_{n+k}$ 收敛.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2) 考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_{n+k} = \sum_{n=1}^{m} na_{n+k} + \sum_{n=m+1}^{\infty} na_{n+k}$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n+k}$ 收敛, 故对充分大的 m 有

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} na_{n+k} \to 0$$

固定 m, 记 $S_{m,k} = a_{k+1} + \cdots + a_{k+m}$, $M_{m,k} = \max\{S_{1,k}, S_{2,k}, \cdots, S_{m,k}\}$. 则由 Abel 变换

$$\left|\sum_{n=1}^{m} na_{n+k}\right| = \left|mS_{m,k} - \sum_{i=1}^{m-1} S_{i,k}\right| \leqslant (2m-1)M_{m,k}$$

令 $k \to \infty$, 则 $S_{i,k} \to 0$(不难得知 $a_k \to 0, k \to \infty$),$i = 1, 2, \cdots, m$, 从而 $M_{m,k} \to \infty$. 即

$$\left|\sum_{n=1}^{m} na_{n+k}\right| \to 0, k \to \infty$$

这就证明了命题. □

11. 解答: 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, 存在递增列 $\{k_j\}$ 使得 (约定 $k_0 = 0$) $\sum\limits_{n=k_{j-1}+1}^{k_j} |a_n| > j, j = 1, 2, \cdots$. 令 $b_n = \operatorname{sgn} a_n, 1 \leqslant n \leqslant k_1, b_n = \dfrac{1}{j+1}\operatorname{sgn} a_n, k_j < n \leqslant k_{j+1} (j = 1, 2, \cdots)$, 显然 $b_n \to 0$, 则由题设有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n < +\infty$, 但

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=k_{j-1}+1}^{k_j} \frac{1}{j} |a_n| > 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \cdots + \frac{1}{j+1}(j+1) + \cdots = +\infty$$

矛盾. 所以命题成立. □

12. 解答: 先证明数列 $\{a_n\}$ 有界. 反证 $\{a_n\}$ 无界, 则存在 $|a_{n_1}| > 1^2, |a_{n_2}| > 2^2, \cdots,$. 取 $b_n = \begin{cases} 1/k^2, n = n_k \\ 0, \text{其他} \end{cases}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 但 $|a_{n_k} b_{n_k}| > 1 \not\to 0$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散, 与题设不符. 因此 $\{a_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$ 使得 $|a_n| < M$.

下取任意收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的余项 $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k$, 则满足 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. 而

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) r_k = a_1 r_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k b_k - a_{n+1} r_n$$

令 $n \to \infty$, 注意 $|a_{n+1} r_n| < M|r_n| \to 0$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) r_n$ 收敛.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

这里需要澄清 r_n 的任意性等价 b_n 的任意性: 对每一列 $\{r_n\}$, 都可以通过 $r_{n-1}-r_n=b_n$ 来给出与之对应的唯一的 $\{b_n\}$ 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. (事实上这是双射)

于是根据上一题的结论可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n+1}|$ 是收敛的.

注:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n+1}|<+\infty$ 也被定义为 $\{a_n\}$ 有界变差. 其他解法参见周民强第二册 P254 例 3.3.26(3). □

13. 解答: 令

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n =&1-1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\cdots\\ &+\frac{1}{\sqrt[3]{k}}-\underbrace{\frac{1}{k\sqrt[3]{k}}-\cdots-\frac{1}{k\sqrt[3]{k}}}_{k\text{项}}+\cdots\end{aligned}$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=0$, 但

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 &= 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8\times 2}-\frac{1}{8\times 2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{27\times 3}+\frac{1}{k}-\frac{k}{k^3\cdot k}+\cdots\\ &=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}-\cdots-\frac{1}{k^3}-\cdots\end{aligned}$$

发散.

注: 其他例子参见徐森林下册 P205 第 563 题. □

14. 解答: 易知 $\int_1^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 所以存在 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=l$. 若 $l\neq 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散 (通项不为 0) 且 $\int_1^{+\infty} f(x)$ 发散 (例题 12.4.1). 故 $l=0$, 有 $\int_{[r]}^{r} f(x)\mathrm{d}x(r\to+\infty)$. 故 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛等价于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 又有

$$\begin{aligned}\left|\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x-f(n)\right| &= \left|\int_n^{n+1}[f(x)-f(n)]\mathrm{d}x\right| = \left|\int_n^{n+1}\left[\int_n^x f'(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \int_n^{n+1}\left[\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x-f(n)\right|\leqslant\int_1^{+\infty}|f'(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty$$

即知命题成立. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

15. 解答: 由 $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ 的凸性可知

$$\frac{f(n-1)+f(n+1)}{2}\geqslant f(n)$$

所以有

$$\begin{aligned}S_{4n+1}&=1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(4n+1)^p}-\frac{1}{2^p}\left[1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]\\&\geqslant 1+\frac{2}{2^p}\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]-\frac{1}{2^p}\left[1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]\\&=1-\frac{1}{2^p}S_{2n}\end{aligned}$$

即

$$S_{4n+1}+\frac{1}{2^p}S_{2n}\geqslant 1$$

两边取极限可知

$$S+\frac{S}{2^p}\geqslant 1\Rightarrow S\geqslant\frac{2^p}{1+2^p}>\frac{1}{2}$$

另一方面有

$$S_{2n+1}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\cdots-\left[\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n+1)^p}\right]<1$$

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right]<1$$

并且从中看出 S_{2n} 递增, S_{2n+1} 递减, 故一定有 $S_{2n}<S<S_{2n+1}<S_1=1$,.

注: 如果视 $p>0$ 为参数, 则 S 是关于 p 的递增函数, 且 $\lim\limits_{p\to+\infty}S(p)=1$. □

16. 解答: 由 Cauchy 准则知: $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N},\forall n>N_1$, 有 $|T_n|\overset{def}{=\!=}\left|\sum\limits_{k=N_1+1}^{n}a_kb_k\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

由 Abel 变换

$$\begin{aligned}&\left|\left(\sum_{k=N_1+1}^{n}a_k\right)b_n\right|=\left|\sum_{k=N_1+1}^{n}a_kb_k\cdot\frac{1}{b_k}\right|b_n\\=&\left|T_{N_1+1}\cdot\frac{1}{b_{N_1+1}}+(T_{N_1+2}-T_{N_1+1})\cdot\frac{1}{b_{N_1+2}}+\cdots+(T_n-T_{n-1})\cdot\frac{1}{b_n}\right|b_n\\=&\left|T_{N_1+1}\left(\frac{1}{b_{N_1+1}}-\frac{1}{b_{N_1+2}}\right)+T_{N_1+2}\left(\frac{1}{b_{N_1+2}}-\frac{1}{b_{N_1+3}}\right)+\cdots+T_n\cdot\frac{1}{b_n}\right|b_n\\<&\frac{\varepsilon}{2}\left|\left(\frac{1}{b_{N_1+1}}-\frac{1}{b_{N_1+2}}\right)+\left(\frac{1}{b_{N_1+2}}-\frac{1}{b_{N_1+3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{b_{n-1}}-\frac{1}{b_n}\right)+\frac{1}{b_n}\right|b_n\\=&\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{b_n}{b_{N_1+1}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

另一方面显然有

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_{N_1})b_n=0$$

则对上述 ε 和 N_1, $\exists N_2\in\mathbb{N}, n>N_2$ 时有

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_{N_1})b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时有

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n|\leqslant\left|\left(\sum_{k=1}^{N_1}a_k\right)b_n\right|+\left|\left(\sum_{k=N_1+1}^{n}a_k\right)b_n\right|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n=0$.

注: 其他证法参见徐森林下册 P207 第 564 题. □

17. 解答: 在上一题中取 $b_n=\dfrac{1}{n^p}$ 即可. □

18. 解答: 若 $S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$, 则由 Cauchy 命题 (命题 2.4.1) 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=S$. 反之不真, 例如取 $a_n=(-1)^n$. □

19. 解答: 只需注意

$$\frac{a_n}{n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{n}=\frac{S_n}{n}-\frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1}$$

令 $n\to\infty$ 即可. □

20. 解答:

(1) 考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{2n-1}=\dfrac{1}{2}$, 因此可以 Cesàro 求和;

(2) 显然不满足上一题中证明的必要条件, 因此不可以 Cesàro 求和;

(3) 考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{3n+2}=\dfrac{2}{3}$, 因此可以 Cesàro 求和;

(4) 当 $x=0$ 时显然 Cesàro 和为 0. 当 $x\neq0$ 时有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}n\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}S_k&=\frac{n}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}[\sin(k+1)x-\sin kx]\\&=\frac{n}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{\sin(n+1)x-\sin x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{x}{2}$. □

21. 解答: 必要性显然, 下证充分性. 注意到

$$\frac{n+1}{n}S_n-\sigma_n=\frac{(n+1)S_n-S_1-S_2-\cdots-S_n}{n}=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} \tag{1}$$

对 (1) 式用 Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}S_n-\sigma_n\right)=\lim_{n\to\infty}na_n=0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$. □

22. 解答: 利用上一题中的 (1) 式, 充分性显然. 至于必要性, 若级数收敛 Cesàro 和必然存在并与之相同, 因此也是显然的了.

注: Cesàro 求和可以作为发散级数的求和法, 发散级数也还有许多其他被定义的求和方法, 可阅读菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第二卷第十一章 §9. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第十四章　函数项级数与幂级数

§14.1.3　练习题　学员: d39

1. 解答:

(1) 极限函数 $S(x)=0$, 由于

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\frac{1}{1/|x|+n^2|x|}\leqslant\frac{1}{2n}\to 0(n\to+\infty)$$

故 $S_n(x)\rightrightarrows S(x),x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 极限函数 $S(x)=0$. 取 $x_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $S_n(x)=\dfrac{1}{2}$, 显然 $S_n(x)\not\rightrightarrows S(x),x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) 极限函数 $S(x)=\dfrac{1}{x}$, 取 $x_n=n$ 则

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in(0,+\infty)}\frac{x}{n}\geqslant 1$$

故 $S_n(x)\not\rightrightarrows S(x),x\in(0,+\infty)$.

(4) 极限函数 $S(x)=0$.

(i) 当 $x\in(0,1)$ 时, 令 n 充分大, 则 $\dfrac{x}{n}<\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{e}$. 注意 $|x\ln x|$ 在 $(0,e^{-1})$ 递增, 于是

$$\sup_{x\in(0,1)}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|\leqslant\left|\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right|\to 0(n\to+\infty)$$

故 $S_n(x)\rightrightarrows S(x),x\in(0,1)$.

(ii) 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, 可取 $x_n=en$ 则

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|\geqslant e$$

故 $S_n(x)\not\rightrightarrows S(x),x\in(0,+\infty)$.

(5) 极限函数 $S(x)=x$.

(i) 当 $x\in[0,a]$ 时, 由于 $x-n\sin\dfrac{x}{n}$ 不变号且单调递增, 故

$$\sup_{x\in[0,a]}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in[0,a]}\left|x-n\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\left|a-n\sin\frac{a}{n}\right|\to 0(n\to+\infty)$$

故 $S_n(x)\rightrightarrows S(x),x\in[0,a]$.

(ii) 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, 取 $x_n=n$ 则

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|x-n\sin\frac{x}{n}\right|\geqslant|n(1-\sin 1)|\to+\infty(n\to+\infty)$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故 $S_n(x) \not\rightrightarrows S(x), x \in (0,+\infty)$.

(6) 极限函数 $S(x)=\begin{cases}0, x \geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$.

(i) 当 $x \geqslant 0$ 时, 由于

$$\sup_{x\geqslant 0}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\geqslant 0}\frac{\ln(1+e^{-nx})}{n}<\frac{e^{-nx}}{n}\to 0(n\to+\infty)$$

故 $S_n(x) \rightrightarrows S(x), x \geqslant 0$.

(ii) 当 $x<0$ 时, 由于

$$\sup_{x<0}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x<0}\left|\frac{\ln(1+e^{-nx})}{n}+x\right|<\left|\frac{\ln(2e^{-nx})}{n}+x\right|=\frac{\ln 2}{n}\to 0(n\to+\infty)$$

故 $S_n(x) \rightrightarrows S(x), x<0$.

(7) 记 $f_n=x^n+x^{-n}, 1/t \leqslant |x| \leqslant t$, 则

$$f_n'(x)=nx^{n-1}-nx^{n-1}=\frac{n}{x^{n+1}}\left(x^{2n}-1\right)$$

当 $\frac{1}{t}<x<1$ 时, $f_n'(x)<0$; 当 $1<x<\frac{1}{t}$ 时, $f_n'(x)>0$. 于是

$$0 \leqslant \max_{1/t\leqslant|x|\leqslant t}|f_n(x)|=\max\left\{f_n\left(\frac{1}{t}\right), f_n(t)\right\}=t^n+t^{-n}$$

因此

$$\left|\frac{n^8}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^n\right)\right|=\frac{n^8}{\sqrt{n!}}|f_n(x)| \leqslant \frac{n^8}{\sqrt{n!}}\left(t^n+t^{-n}\right)<\frac{2t^n n^8}{\sqrt{n!}}$$

由 D'Alembert 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2t^n n^8}{\sqrt{n!}}$ 收敛, 再根据 Weierstrass 判别法知原函数项级数一致收敛.

(8) 因为

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\cdot\sin kx\right|&=\left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\cos(k-1)x-\cos(k+1)x)\right|\\&=\frac{1}{2}|1+\cos x-\cos nx-\cos(n+1)x| \leqslant 2\end{aligned}$$

而 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 递减且一致趋于 $0(n\to+\infty)$, 由 Dirichlet 判别法原函数项级数一致收敛.

(9)(i) 事实上在任意有限闭区间 $[a,b]$ 上由

$$\mathrm{e}^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}\quad(t \leqslant n) \tag{$*$}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

则当 n 充分大时, 有

$$\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]\leqslant\frac{x^2}{n^2}\mathrm{e}^x$$

令 $M=\max\{|a|,|b|\}$, 则当 $x\in[a,b]$ 时, $e^x\leqslant e^M, x^2\leqslant M^2$, 故

$$\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]\leqslant\frac{M^2}{n^2}\mathrm{e}^M$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M^2}{n^2}\mathrm{e}^M=M^2\mathrm{e}^M\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知原函数项级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

(ii) 取 $x_n=n$, 则当 $n\to+\infty$ 时

$$\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^n-\left(1+\frac{n}{n}\right)^n\right]=\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^n-2^n\right)=\frac{2^n}{n}\left[\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^n-1\right]\to+\infty$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}^n-\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^n\right]\not\to 0$.

注: (*) 式的证明参见徐森林下册 P257 第 621 题. □

2. 解答: 对 $|x|<1$, 由 $|f_n(x)|=\left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right|<|x|^n$ 可知它绝对收敛. 并且注意到 $|f_n(x)|=|f_n(x^{-1})|$, 故在 $|x|>1$ 时它也绝对收敛. 当 $|x|=1$ 时, 显然发散. 故收敛域 $\mathbb{R}/\{-1,1\}$.

令 $x_n=1\pm\dfrac{1}{n}$, 可知通项 $\dfrac{x_n^n}{1+x_n^{2n}}\not\to 0$, 因此非一致收敛. □

3. 解答: $x=0$ 时结论平凡, $x\neq 0$ 时 $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\dfrac{1}{1+x^2}<1$, 原函数项级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对收敛. 又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{nx^2}{(1+x^2)^n}\overset{def}{=\!=}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且一致收敛. 而当 $n>\dfrac{1}{x^2}$ 时

$$\frac{b_n(x)}{b_{n+1}(x)}=\frac{n\left(1+x^2\right)}{n+1}=\frac{1+x^2}{1+1/n}>1$$

即 $\{b_n(x)\}$ 单调递减, 且显然 $|b_n(x)|\leqslant 1$. 由 Abel 判别法知原函数项级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 下面利用 Cauchy 准则来证明非一致收敛性.

考虑

$$\left|\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}}\right|=\frac{1-\dfrac{1}{(1+x^2)^{2n}}}{(1+x^2)^n}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

若取 $x_n^2=\dfrac{1}{n}$, 则余项将趋于 $\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^3}$, 这与 Cauchy 收敛准则矛盾. □

4. 解答: 注意到

$$0\leqslant \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\leqslant \frac{x^2}{n\ln^2 n}<\frac{a^2}{n\ln^2 n}$$

而 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^2}{n\ln^2 n}$ 收敛 (积分判别法), 故由 Weierstrass 判别法知原函数项级数一致收敛. □

5. 解答: 易见通项

$$|u_n(x)|\leqslant \frac{2^n}{3^n x}$$

因此在 $(0,+\infty)$ 上原函数项级数处处绝对收敛. 但取 $x_n=\dfrac{2}{3^n\pi}$, 则

$$|u_n(x_n)|=2^n\not\to 0(n\to+\infty)$$

因此在 $(0,+\infty)$ 上原函数项级数非一致收敛. □

6. 解答: 假设 $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m>n>N,\forall x\in[0,1]$, 有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^x(t^n+\cdots+t^m)\sin\pi t\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1\frac{t^n}{1-t}\sin\pi t\mathrm{d}t\\ =&\int_0^{1/2}+\int_{1/2}^1\leqslant\int_0^{1/2}\frac{t^n}{1/2}\mathrm{d}t+\int_{1/2}^1\frac{t^n}{1-t}\cdot\pi(1-t)\mathrm{d}t\\ =&2\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\pi\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\leqslant\frac{2+\pi}{n+1}<\varepsilon\end{aligned}$$

为此只需要取 $N=\left[\dfrac{2+\pi}{\varepsilon}\right]$ 即可满足 Cauchy 收敛准则, 从而该函数项级数在 $[0,1]$ 上一致收敛.

7. 解答: 记 $\{f_n\}$ 在 (a,b) 上的极限函数为 f. 利用例题 14.1.3 的结论 (逆否命题) 可知 $f(x)$ 在 a 点和 b 点都收敛 (延拓定义 $f(a)$ 和 $f(b)$), 即对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时有

$$|f_n(a)-f(a)|<\varepsilon,\quad |f_n(b)-f(b)|<\varepsilon$$

又 $f_n\rightrightarrows f,x\in(a,b)$, 则对上述 $\varepsilon>0,\exists N_2$, 当 $n>N_2$ 后对任意 $x\in(a,b)$ 满足

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 后对所有 $x\in[a,b]$ 满足 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 即 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. □

8. 解答: 对任意 $x\in(a,b),\forall n,\exists\xi_n\in\left(x-\dfrac{1}{n},x+\dfrac{1}{n}\right)$ 使得 $F_n(x)=f'(\xi_n)$. 由于 $\xi_n\to x$ 且 f' 连续, 故 $F_n(x)\to f'(x)$, 即 F_n 在 (a,b) 上处处收敛于 f'.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

对任意 $[c,d]\subset(a,b)$, $f'(x)$ 在 $[c,d]$ 连续从而一致连续. 因此对任给的 $\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|\xi_n-x|<\delta$ 时有

$$|F_n(x)-f'(x)|=|f'(\xi_n)-f'(x)|<\varepsilon$$

为此, 只要取 $N>\dfrac{1}{\delta}$, 则当 $n>N$ 后就有了上式成立. 故 F_n 内闭一致收敛于 f'. □

9. 解答: 不妨设 $\{u_n(x)\}$ 单调增加, 则对任意 $x\in[a,b],n\in\mathbb{N}$ 有

$$|u_n(x)|\leqslant\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(a)|$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(b)|$ 都收敛, 故由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. □

10. 解答: 易见 f 连续无零点, 不妨设 $f>0$, 则存在 $A>0$ 使得 $f(x)\geqslant A$. 由于 $f_n\rightrightarrows f$, 故对任给的正数 $\varepsilon<\dfrac{A}{2}$, $\exists N,\forall n>N,\forall x\in[a,b]$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\Rightarrow f_n(x)>f(x)-\varepsilon>\frac{A}{2}$$

因此当 $n>N$ 后 f_n 在 $[a,b]$ 上无零点且恒正. 于是

$$\left|\frac{1}{f_n}-\frac{1}{f}\right|=\left|\frac{f_n-f}{f_nf}\right|<\frac{2}{A^2}|f_n-f|<\frac{2}{A^2}\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $\dfrac{1}{f_n}\rightrightarrows\dfrac{1}{f}$. □

11. 解答: 由于 $f_n\rightrightarrows f(n\to\infty),x\in I$, 则对 $\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n>N+1>N$ 时, 对所有 $x\in I$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad |f_{N+1}(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow|f_n(x)-f_{N+1}(x)|\leqslant|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_{N+1}(x)|<2\varepsilon$$

$$\Rightarrow|f_n(x)|<|f_{N+1}(x)|+1$$

又对每个 n 有 f_n 有界, 设

$$|f_n(x)|\leqslant M_n,n=1,2,\cdots,N+1,x\in I$$

令 $M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_{N+1}\}$, 则对一切正整数 n 有

$$|f_n(x)|\leqslant M+1,x\in I$$

即 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

12. 解答: 设 $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$. 上一题可知 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在 I 上一致有界. 设 $|f_n| \leqslant M_1, |g_n| \leqslant M_2$, 则

$$\begin{aligned}|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ &\leqslant |f_n(x) - f(x)|\,|g_n(x)| + |f(x)|\,|g_n(x) - g(x)| \\ &\leqslant M_2|f_n(x) - f(x)| + M_1|g_n(x) - g(x)|\end{aligned}$$

再由 $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ 的定义, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 可取充分大的 N 使得对所有 $n > N$ 和 $x \in I$ 有

$$|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2M_2}, \quad |g_n - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M_1}$$

$$\Rightarrow |f_n \cdot g_n - f \cdot g| \leqslant M_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_2} + M_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_1} = \varepsilon$$

于是 $f_n \cdot g_n \rightrightarrows f \cdot g$.

注: 去掉 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 有界后结论不成立, 反例参见徐森林下册 P233 第 592 题. □

13. 解答: 由 f 连续易见 $f(x+t)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积且对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

对任意 $[a,b] \subset (-\infty, +\infty)$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(x+t)\right]\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sum_{t=0}^{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(x+t)\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, f 在 $[a, b+1]$ 上连续且一致连续, 故 $\exists \delta > 0, \forall x', x'' \in [a, b+1], |x' - x''| < \delta$ 时

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

取 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{N} < \delta$, 则当 $n > N$ 时 $\frac{1}{n} < \delta$. 当 $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ 时, $x+t \in [a+t, b+t] \subset [a, b+1]$, 于是

$$\left|\left(x + \frac{k}{n}\right) - (x+t)\right| = \left|\frac{k}{n} - t\right| < \frac{1}{n} < \delta$$

从而

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f\left(x + \frac{k}{n}\right) - f(x+t)\right|\mathrm{d}t \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varepsilon \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故 $f_n(x) \rightrightarrows \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t, x \in [a,b]$. □

14. 解答: $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 所以在 $[a,b]$ 上有界, 即 $\exists M>0, |f_1(x)| \leqslant M$. 由此知

$$|f_2(x)| = \left|\int_a^x f_1(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^x |f_1(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant M(x-a)$$

$$|f_3(x)| \leqslant \int_a^x M(x-a)\mathrm{d}x = \frac{M}{2}(x-a)^2$$

.....

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{M}{n!}(x-a)^{n-1} \leqslant \frac{M}{n!}(b-a)^{n-1} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. □

§14.2.4 练习题　学员: d39

1. 解答: 因为 $\dfrac{1}{2^n n^x} < \dfrac{1}{2^n}$, 由 Weierstrass 判别法知原级数一致收敛, 于是

$$\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$ □

2. 解答: 当 $x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ 时通项不趋于 0, 级数发散; 当 $x \in [0,1)$ 时, 因为当 n 充分大后总是存在常数 a, $x<a<1$ 使得 $\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n < a^n$, 故级数收敛; 当 $x \in (-1,0)$ 时, 则当 n 充分大后有 $\left|x+\dfrac{1}{n}\right|^n < |x|^n$, 故级数绝对收敛. 因此定义域 $(-1,1)$.

下面考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$:

当 $x \in [0,b] \subset [0,1)$ 时, 存在常数 c 使得 $x<b<c<1$, 则当 n 充分大后有

$$n\left(x+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \leqslant n\left(b+\frac{1}{n}\right)^{n-1} < nc^{n-1}$$

当 $x \in [d,0) \subset (-1,0)$ 时, 存在常数 e 使得 $-1<e<d$, 则当 n 充分大后

$$\left|n\left(x+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right| \leqslant \left|n\left(d+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right| < n|e|^{n-1}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛. 于是 $S(x)$ 可微, 当然也连续. □

3. 解答: 在任意有界区间 $[a,b]$ 上, 由于 $\left|\dfrac{x}{x^2+n^2}\right| \leqslant \dfrac{\max\{|a|,|b|\}}{n^2}$, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n^2+x^2}$ 内

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

闭一致收敛. 另一方面, 令 $u_n(x)=\dfrac{n}{n^2+x^2}$. 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$u_n(x)-u_{n+1}(x)=\frac{n}{n^2+x^2}-\frac{n+1}{(n+1)^2+x^2}=\frac{n^2+n-x^2}{(n^2+x^2)\left[(n+1)^2+x^2\right]}$$

当 n 足够大时 $u_n(x)-u_{n+1}(x)>0$.$\{u_n(x)\}$ 单调递减且

$$u_n(x)=\frac{n}{n^2+x^2}<\frac{1}{n}\to 0$$

而 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$ 一致有界. 由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2+x^2}$ 一致收敛.

因此 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x+n(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛.(内闭 + 内闭 = 内闭, 这点由 $|(f+g)-(f_n+g_n)|\leqslant|f_n-f|+|g_n-g|$ 易证)

再考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+n(-1)^n}{n^2+x^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2(-1)^nnx-x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

在任意有界闭区间 $[a,b]$ 内, 设 $M=\max\{|a|,|b|\}$, 则有

$$\left|\frac{n^2-2(-1)^nnx-x^2}{(n^2+x^2)^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{2M}{n^3}+\frac{M^2}{n^4}$$

由 Weierstrass 判别法知该级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛, 因此和函数可导. □

4. 解答:$\forall\varepsilon>0$, 由于 $S_n\rightrightarrows S$, 故存在 N, 当 $n>N$ 后对任意 x,y 有

$$|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |S(y)-S_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

再由 S_n 一致连续,$\exists\delta>0$, 只要 $|x-y|<\delta$ 就有

$$|S_n(x)-S_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是, 当 $n>N$ 后, 只要 $|x-y|<\delta$, 就有

$$|S(x)-S(y)|\leqslant|S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(y)|+|S_n(y)-S(y)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

即 $S(x)$ 一致连续. □

5. 解答: $g(x)$ 可积因此有界, 存在 $M>0$ 使得

$$|f_n(x)|\leqslant g(x)\leqslant M, x\in[a,b], n=1,2,\cdots$$

因此, 我们只需要证明 f 在 $[a,b]$ 上可积即可使用命题 14.2.4 得到结论.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. 设 $f_n \to f$, 因 f_n 可积 (连续), 且在 $[a, b-\delta]$ 上 $f_n \rightrightarrows f$, 因此 f 在 $[a, b-\delta]$ 上可积 (连续). 由此, 对细度任意小的分割

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = b - \delta < x_{r+1} < \cdots < x_n = b$$

可有

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ω_i 是 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅. 显然 $\omega_i \leqslant 2M$, 故有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{r} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=r+1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$$

这就证明了 f 在 $[a, b]$ 上可积.

注: 也可以不使用命题 14.2.4, 方法类似徐森林下册 P251 第 614 题. □

6. 解答:

充分性: 由题意, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists N, \forall x \in O_\delta(x_0)$(这里我们确保 δ 充分小使得 $O_\delta(x_0) \subset O(x_0)$), 成立

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$$

又 f_N 在 x_0 处连续,$f_N(x_0) \to f(x_0)$, 因此

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是就有

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

即 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

必要性: 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 类似地, 我们可以得到

$$|f_N(x) - f(x)| \leqslant |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

命题得证. □

7. 解答:

必要性: 若 $f_n \rightrightarrows f$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n > N_1, x \in [a, b]$ 成立 $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

对 $\{x_n\} \to x_0$, $\{x_n\} \subset [a, b]$, 则有 $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

再依 f 的连续性, 存在 N_2, $n > N_2$ 则 $|f(x_n) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时就有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$|f_n(x_n)-f(x_0)|\leqslant|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.

充分性: 若 $f_n\not\rightrightarrows f$, 则存在 $\varepsilon_0>0$, $n\to+\infty$, $|f_n(x_n)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$. 由于 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 故存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}\to x_0$ 且

$$|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0$$

利用 f 的连续性存在 N, $\forall n>N$ 有 $|f(x_{n_k})-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$, 则

$$\varepsilon_0\leqslant|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|\leqslant|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x_{n_k})|$$

$$\Rightarrow|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0-|f(x_0)-f(x_{n_k})|>\frac{\varepsilon_0}{2}$$

即 $\lim\limits_{n_k\to\infty}f_{n_k}(x_{n_k})\neq f(x_0)$, 矛盾. 假设不成立, 命题得证. □

8. 解答: 本题给的条件较弱, 因此需要加强换序定理.

(1) 先证明 f 可积. (徐森林第三册定理 13.2.3)

反证易知对于 f 中不连续的点, 必然存在 f_n 在此点不连续. 若记 D^* 为 $[a,b]$ 中不连续点的集合, 则

$$D_f^*\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{f_n}^*$$

可数个零测集的并为零测集, 因此 D_f^* 为零测集. 又 $f_n\rightrightarrows f$, 故存在 N_0 使得

$$|f(x)-f_{N_0}(x)|\leqslant1,\quad\forall x\in[a,b]$$

$$|f_{N_0}(x)|\leqslant M\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f_{N_0}(x)|+1\leqslant M+1,\quad\forall x\in[a,b]$$

所以 f 在 $[a,b]$ 上有界且不连续点为零测集, 由 Lebesgue 定理知 f 可积.

注: 不用零测集的证明参见伍胜健定理 10.4.3.

(2) 再证明 F_n 的极限与求导运算可换序.(Rudin《数学分析原理》定理 7.17)

由于 f_n 存在原函数, 设 $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$ 为 f_n 的一个原函数, 则 $F_n'(x)=f_n(x)\rightrightarrows f$. 且显然 $F_n(x)$ 在点 a 处收敛. 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n\geqslant N,m\geqslant N$ 时有

$$|F_n(a)-F_m(a)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad|f_n(t)-f_m(t)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\quad(a\leqslant t\leqslant b)$$

对 F_n-F_m 用 Lagrange 中值定理, 则对任意 $x,t\in[a,b]$ 有

$$|F_n(x)-F_m(x)-F_n(t)+F_m(t)|\leqslant\frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\tag{1}$$

$$\Rightarrow|F_n(x)-F_m(x)|\leqslant|F_n(x)-F_m(x)-F_n(a)+F_m(a)|+|F_n(a)-F_m(a)|<\varepsilon$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

即 $\{F_n(x)\}$ 一致收敛. 令 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)$, 对 $[a,b]$ 上固定的点 x, $a\leqslant t\neq x\leqslant b$ 定义

$$\varphi_n(t)=\frac{F_n(t)-F_n(x)}{t-x},\quad \varphi(t)=\frac{F(t)-F(x)}{t-x}\qquad (2)$$

那么

$$\lim_{t\to x}\varphi_n(t)=F_n'(x)=f_n(x)\qquad (3)$$

利用 (1) 式可得到

$$|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\quad (n\geqslant N,m\geqslant N)$$

于是 $\{\varphi_n\}$ 对于 $a\leqslant t\neq x\leqslant b$ 一致收敛. 又因为 $F_n\rightrightarrows F$, 由 (2) 式得到, 对 $a\leqslant t\neq x\leqslant b$ 一定有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$$

一致地成立. 由 (2)(3) 两式有 (可参看 Rudin《数学分析原理》定理 7.11)

$$\lim_{t\to x}\varphi(t)=\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

根据 $\varphi(t)$ 的定义可知

$$F'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

这就证明了 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.

注: 在一般的教科书中, 积分换序和求导换序的结论都是较弱的. 通常情况积分换序要求连续且一致收敛, 求导换序要求具有连续的导函数且导函数一致收敛, 因此本题不可以直接使用一般的教科书上给出的换序定理.

基于本题, 下面总结: 若函数列 f_n 在 I 上一致收敛于 f, 哪些性质可以传递?

可传递: (1) 连续 (2) 可积 (3) 可导 (4) 原函数存在 (5)(非严格) 单调 (6) 一致连续 (其中 (3) 要有收敛点, (6) 无需 I 是闭区间)

不可传递: (1) 不连续 (2) 不可积 (3) 不可导 (4) 原函数不存在 (5)(严格) 单调 (6) 非一致连续 (7) 有 (无) 界　□

§14.3.2　思考题　学员: d39

1. 解答:

(1) 若 $a<x_0<b$

(i) 若 $|x_0-a|<|x_0-b|$, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $[a,b)$ 上绝对收敛.

(ii) 若 $|x_0-a|>|x_0-b|$, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $(a,b]$ 上绝对收敛.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(iii) 若 $|x_0-a|=|x_0-b|$, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 (a,b) 上绝对收敛.

(2) 若 $x_0<a<b$, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $[a,b)$ 上绝对收敛.

(3) 若 $a<b<x_0$, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $(a,b]$ 上绝对收敛.

(4) 若 $x_0=a$, 则, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $[a,b)$ 上绝对收敛.

(5) 若 $x_0=b$, 则, 则级数在 $[a,b]$ 上收敛且一致收敛, 在 $(a,b]$ 上绝对收敛. □

2. 解答: 记 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 R_3, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nb_n)x^n$ 的收敛半径为 R_4, 则

$$R_3=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n+b_n|}}\geqslant\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max\{|a_n|,|b_n|\}}}=\min\{R_1,R_2\}$$

$$R_4=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_nb_n|}}\geqslant\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}\cdot\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}}=R_1R_2$$

注: (1) 第二个不等式可参看第三章第一组参考题第 6 题.

(2) 也可参看《超越普里瓦洛夫》——数项级数卷第 102 题的解法. □

3. 解答: 该级数 $S(x)$ 在端点处一定收敛. 由 $S(x)$ 在 (x_0-R,x_0+R) 内一致收敛的 Cauchy 准则有 $|S_m(x)-S_n(x)|<\varepsilon/2$, 利用 S_m,S_n 的连续性可知 $|S_m(\pm R)-S_n(\pm R)|\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$, 从而 $S(x)$ 在 $[x_0-R,x_0+R]$ 上一致收敛, 在端点处收敛且单侧连续. □

4. 解答: 不能. 因为端点可能发散, 无法找到优级数.

5. 解答:

(1) 可取 $a_n=(n+1)(-1)^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^nx^n$ 的收敛半径为 1. 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 发散, 而 $\int_0^1\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^nx^n\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

(2) 当 $|x|<R$ 时, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛, 则有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-R,R)$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛, 故由 Abel 第二定理知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $x=R$ 处左连续, 故

$$\int_0^R\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\int_0^R f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to R^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$$

命题成立. □

6. 解答: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(x^2\right)^n$, 所以 $x^2\in[0,R)$, 其收敛半径为 $\sqrt{R}$. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

7. 解答: 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 结论成立. 因为如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 则必然 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$. 对 $\forall M > 0, \exists N, \forall n > N, \sum\limits_{k=0}^{n} a_k > 2M$. 取 $0 < \delta < 1 - 2^{-\frac{1}{N}}$, 则当 $0 < 1 - x < \delta < 1 - 2^{-\frac{1}{N}}$ 时, $x^N > \dfrac{1}{2}$. 于是

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n > \sum_{n=0}^{N} a_n x^n > \sum_{n=0}^{N} a_n x^N > \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{1}{2} > M$$

这说明 $\lim\limits_{x \to 1^-} S(x)$ 不存在.

注: 其他解法参见徐森林下册 P283 第 642 题. □

§14.3.4 练习题　学员: d39

1. 解答: 易证

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1^n + 2^n + \cdots + k^n}{n^2}} = k$$

因此

$$\frac{1-x}{1+x} \in \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{k+1}{k-1}\right)$$

考虑端点处有

$$\left|\frac{1^n + 2^n + \cdots + k^n}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^k\right| \leqslant \frac{k}{n^2}$$

由 Weierstrass 判别法知级数在端点处收敛, 所以收敛域为 $\left[\dfrac{k-1}{k+1}, \dfrac{k+1}{k-1}\right]$. □

2. 解答: 设 $a_n = a_0 + nd$, 则 $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_0 + nd} = 1$, 收敛半径为 1. □

3. 解答: 我们有

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{a^n}{1 + a^{2n}}} = \begin{cases} a^{-1}, a \geqslant 1 \\ a, \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

故当 $a \geqslant 1$ 时收敛半径为 a, 当 $0 < a < 1$ 时收敛半径为 a^{-1}. □

4. 解答: 记 $a_n = \dfrac{(n!)^k}{(kn)!}$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^k}{[k(n+1)]!} \frac{(kn)!}{(n!)^k} = \frac{(n+1)^k}{(kn+k)(kn+k-1)\cdots(kn+1)}$$

令 $n \to \infty$ 得 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{k^k}$. 故半径为 k^k. 在端点处级数通项不趋于 0, 发散. 故收敛域 $(-k^k, k^k)$.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

注: (1) 求收敛半径时也可由 Stirling 公式得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{(n!)^k}{(kn)!}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left[\sqrt{2\pi n}\right]^k\left(\frac{n}{e}\right)^{kn}/\sqrt{2k\pi n}\left(\frac{kn}{e}\right)^{kn}}=\frac{1}{k^k}$$

(2) 推广结论参见周民强第二册 P339 例 5.1.9(2). □

5. 解答:

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

收敛半径为 e^{-1}. 在端点处通项不趋于 0, 发散. 故收敛域 $(-e^{-1},e^{-1})$.

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}}=1$$

收敛半径为 1. 在 $x=1$ 处, 记 $a_n=\dfrac{1}{n!}\cdot\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n/e<1$$

$$a_n\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

由 Leibniz 判别法级数收敛. 在 $x=-1$ 处, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}=+\infty$. 故收敛域 $(-1,1]$.

(3)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{a^n+(-b)^n}{n}}=\max\{|a|,|b|\}$$

收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\max\{|a|,|b|\}}$.

(i) 若 $|a|>|b|$, 则 $R=a^{-1}$. 在 $x=a^{-1}$ 处级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-b/a)^n}{n}$ 级数发散, 在 $x=-a^{-1}$ 处 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+(b/a)^n}{n}$ 收敛. 收敛域为 $[-a^{-1},a^{-1})$.

(ii) 若 $|a|<|b|$, 则 $R=b^{-1}$. 在 $x=b^{-1}$ 处级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+(a/b)^n}{n}$ 收敛, 在 $x=-b^{-1}$ 处级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+(-a/b)^n}{n}$ 发散. 收敛域为 $(-b^{-1},b^{-1}]$.

(iii) 若 $|a|=|b|$, 则在 $x=\pm a^{-1}$ 处级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}$ 发散. 收敛域为 $(-a^{-1},a^{-1})$.

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{1+n^2}}=1$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

收敛半径为 1. 在 $x=1$ 处, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{1+n^2}}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛 (练习题 13.2.5 的 3(1)).

在 $x=-1$ 处根据 Leibniz 判别法知收敛. 收敛域为 $[-1,1]$.

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{\ln n+\gamma+o(1)}{n}\right]=1$$

收敛半径为 1. 在 $x=\pm1$ 处通项不趋于 0, 级数发散. 收敛域为 $(-1,1)$.

注: 本题的和函数是可以计算出来的, 参见陈兆斗 P328 第 35 题.

(6) 记 $a_k=\begin{cases}n^{n^2},k=n^3\\0,k\neq n^3\end{cases}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n^2}x^{n^3}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^3]{n^{n^2}}=1$. 收敛半径为 1. 在 $x=\pm1$ 处通项不趋于 0, 级数发散. 收敛域为 $(-1,1)$.

(7) 记 $t=x^2+x+1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{1}{3n}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{\ln\sin\frac{1}{3n}}{n}\right]\overset{\text{L'hospital}}{=\!=\!=}\lim_{n\to\infty}\exp\left[-\frac{1}{3n^2}\cdot\frac{\cos(3n)^{-1}}{\sin(3n)^{-1}}\right]=1$$

在 $t=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{3n}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n}$ 发散, 在 $t=-1$ 时由 Leibniz 判别法级数收敛. 收敛域为 $t\in(-1,1]$, 解得 $x\in(-1,0)$.

(8) 令 $t=\dfrac{x}{3x+1}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n-1}{n^2+1}}=1$$

在 $t=1$ 时级数发散, 在 $t=-1$ 时级数收敛. 收敛域为 $[-1,1)$, 解得 $x\in\left[-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$. □

6. 解答:

(1) 收敛半径为 1, 在 $x=\pm1$ 时级数收敛, 收敛域为 $[-1,1]$.

$$S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$\left[\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}\right]'=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^nx^{n-2}=\frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}=\int_0^t\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(1+x)$$

$$\Rightarrow S(x)=\int_0^t t\ln(1+t)\mathrm{d}t=\frac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2}-\frac{x^2-2x}{4}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2) 收敛半径为 1, 在 $x=\pm1$ 时级数收敛, 收敛域为 $[-1,1]$.

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad S''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$$

$$\Rightarrow S'(x)=2\arctan x\Rightarrow S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$$

(3) 收敛半径为 1, 在 $x=\pm1$ 时级数发散, 收敛域为 $(-1,1)$.

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\right]'=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}=\int_0^x\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t=\ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow S(x)=\left[x\ln(1+x^2)\right]'=\frac{2x^2}{1+x^2}+\ln(1+x^2)$$

(4) 收敛半径为 1, 在 $x=\pm1$ 时级数发散, 收敛域为 $(-1,1)$.

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2x^{n-1}=xI_1(x)$$

$$\int_0^x I_1(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}=xI_2(x)$$

$$\int_0^x I_2(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n=-\frac{x}{1+x}$$

$$\Rightarrow I_2(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow I_1(x)=\frac{2x}{(1+x)^3}-\frac{1}{(1+x)^2}\Rightarrow S(x)=\frac{2x^2}{(1+x)^3}-\frac{x}{(1+x)^2}$$

(5) 收敛半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 在 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时级数发散, 收敛域为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$S(x)=4\sum_{n=0}^{\infty}(2x^2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\frac{4}{1-2x^2}-\frac{1}{1-x^2}$$

(6) 收敛半径为 1, 在 $x=0$ 或 2 时级数发散, 收敛域为 $(0,2)$. 令 $t=x-1$.

$$S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n=t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=t\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)'=t\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{t}{(t-1)^2}$$

$$\Rightarrow S(x)=\frac{x-1}{(x-2)^2}$$

□

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

7. 解答:

$$u^{(4)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{4n}}{(4n)!}\right]^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-2)(4n-3)x^{4n-4}}{(4n)!}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4(n-1)}}{4(n-1)!}=u(x)$$

□

8. 解答: 计算得

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2}x^{2n}$$
$$u'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{[(2n)!!]^2}x^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+2)}{[(2n+2)!!]^2}x^{2n+1}$$
$$u''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{[(2n)!!]^2}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+2)(2n+1)}{[(2n+2)!!]^2}x^{2n}$$

$$xu''+u'+xu=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2}+\frac{(-1)^{n+1}(2n+2)}{[(2n+2)!!]^2}+\frac{(-1)^{n+1}(2n+2)(2n+1)}{[(2n+2)!!]^2}\right\}x^{2n+1}$$

直接验证每一项的系数为 0, 因此 $xu''+u'+xu=0$.

□

9. 解答:

(1) 当 $x\in[-1,1]$ 时,

$$\left|\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$$

知 $S_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛, 因而 $S(x)\in C[-1,1]$.

(2)$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}$, $S'(-1-0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(1+n)}$ 收敛, 由命题 7.1.7 知 $S'_-(-1)<+\infty$. $S'(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(1+n)}$ 发散, 由思考题 14.3.2 第 7 题知 $S'_+(1)=+\infty$.

□

10. 解答: 当 $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 时, 有 $\left|\frac{2^n}{n^2}x^n\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$, 由 Weierstrass 判别法知级数在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛, 所以 f 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上连续且在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上可逐项求导. 在端点处, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 发散, 由思考题 14.3.2 第 7 题知 $f(x)$ 在 $1/2$ 处不可导, 而 $f'(-0.5+0)$ 收敛, 由命题 7.1.7 知 $f(x)$ 在 $-1/2$ 处虽然不可导但存在右导数.

□

11. 解答: 令

$$F(x)=\begin{cases}f(x)+f(1-x), & x=0,1\\ f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x), & x\in(0,1)\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且容易由 Weierstrass 判别法知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上可导, 因此

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n\equiv 0$$

故在 $[0,1]$ 上, $F(x)\equiv C$(常数). 由 $F(1)=f(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 显然命题得证. □

12. 解答: 由题意知 S_n 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛于 S, 故对任意闭区间 $[a,b]$, S 在 $[a,b]$ 上连续, 从而也一致连续. 所以对任给的 $\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in[a,b],|x-y|<\delta$ 有

$$|S(x)-S(y)|<\varepsilon$$

另一方面, $S_n\rightrightarrows S, x\in[a,b]$. 故 $\exists N,\forall n>N,\forall x\in[a,b]$, 有

$$|S_n(x)-S(x)|<\delta$$

于是有

$$|S(S_n(x))-S(S(x))|<\varepsilon,\quad \forall n>N, x\in[a,b]$$

即 $\{S\circ S_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛于 $\{S\circ S\}$. □

13. 解答:

(1) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_nx^n$ 的收敛半径为别为 R_1,R_2. 在 $(-R_1,R_1)$ 内成立等式 (由题设可知 $R_1\leqslant 1$)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$$

由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_nx^n$ 收敛, 故 $R_2\geqslant R_1$. 又有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{S_n}\geqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$, 故 $R_2\leqslant R_1$. 从而 $R_1=R_2$.

注: 涉嫌遗漏 $a_n\geqslant 0$, 原题参见周民强第二册 P338 例 5.1.7(2).

(2) 由 $R\leqslant 1$ 知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$. 由题设知, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\frac{S_{n-1}}{S_n}=1-\frac{a_n}{S_n}\to 1$$

进而

$$\sqrt[n]{a_0+a_1+\cdots+a_n}=\sqrt[n]{S_n}=\sqrt[n]{\frac{S_n}{S_{n-1}}\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\cdots\frac{S_2}{S_1}S_1}\to 1$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=0$, 故 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时有

$$\frac{a_n}{S_n}<1\Rightarrow a_n<a_0+a_1+\cdots+a_n$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_0+a_1+\cdots+a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{S_n}=1$$

因此 $\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}}=1$, $R=1$.

注: 其他证法参见徐森林下册 P300 第 656 题. □

§14.4.4 练习题 学员: d39

1. 解答:

(i) $f(x)=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1-x/a}=\dfrac{1}{a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{a}\right)^n$;

(ii) $f(x)=\dfrac{1}{a-b}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x-b}{a-b}}=\dfrac{1}{a-b}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x-b}{a-b}\right)^n$;

(iii) $f(x)=-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1-a/x}=-\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{a}{x}\right)^n$. □

2. 解答: 令 $\dfrac{x-1}{x+1}=t$, 则 $x=\dfrac{1+t}{1-t}$, 于是

$$\begin{aligned}f(x)=\ln x&=\ln\frac{1+t}{1-t}=\ln(1+t)-\ln(1-t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k-1}}{2k-1}\\&=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1}\end{aligned}$$

□

3. 解答: 设 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M, n=1,2,\cdots,x\in(-a,a)$. 任取 $x_0\in(-a,a)$, 利用 Lagrange 型余项, 对任意 $x\in(-a,a)$ 有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant M\cdot\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,\quad(n\to\infty)$$

由命题 14.4.3, f 在 $(-a,a)$ 上可以展开为 Maclaurin 级数. □

4. 解答: 由上题结论知 f 可展开为 Maclaurin 级数, 即对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

由题设可得

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$$

由 Rolle 定理, 在 $(x_i;x_{i+1})$ 间存在 $y_i\to 0$ 使得 $f(y_i)=0, i=1,2,\cdots$. 于是

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}f(y_n)=0$$

以此类推可得 $f^{(n)}(0)=0, n=1,2,\cdots$, 即 $f(x)\equiv 0, x\in(-\infty,+\infty)$. □

5. 解答:

(1) $f(x)=\sqrt{4-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n, x\in[-4,4]$;

(2) $f(x)=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}, x\in\mathbb{R}$;

(3)

$$f'(x)=\frac{4x+3}{1+3x+2x^2}=\frac{2}{1+2x}+\frac{1}{1+x}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2^{n+1}+1)x^n$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}+1}{n+1}x^{n+1}, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

注: 求导后收敛域可能减小, 积分后收敛域可能变大, 在 1/2 处收敛性与推导并不矛盾.

(4)

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x\in[-1,1]$$

(5) $f(x)=\frac{1-x}{1-x^5}=\frac{1}{1-x^5}-\frac{x}{1-x^5}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{5n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{5n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, x\in(-1,1)$. 其中

$$a_n=\begin{cases}1, n=5k\\ -1, n=5k+1\end{cases}\qquad k=0,1,2,\cdot$$

(6) 设 $f(x)=\frac{e^{x^2}}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 则

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=a_0+a_1x+\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+2}-a_n)x^{n+2}$$

$$\Rightarrow a_0=1, a_1=0, a_{2k}-a_{2k-2}=\frac{1}{k!}, a_{2k+1}=0, k=1,2,\cdots$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\Rightarrow a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+a_0=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

再计算收敛半径

$$R^{-1}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{a_{2k}}=1$$

在端点 ±1 处通项不趋于 0(偶数列趋于 e), 所以收敛域是 $(-1,1)$.

$$(7)f(x)=\left[\frac{e^x-1}{x}\right]'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!},x\in(-\infty,+\infty);$$

$$(8)f(x)=\int_0^x\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^{2n-2}}{(2n)!}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!},x\in\mathbb{R}.\ \square$$

6. 解答:

$$(1)f(x)=\frac{1}{3+x}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-2}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n(x-2)^n;$$

(2) 令 $t=x+1$, 则

$$\begin{aligned}f(x)&=\ln\frac{1}{2+t^2}=-\ln2-\ln\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\\&=-\ln2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{t^2}{2}\right)^n=-\ln2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]^n\end{aligned}$$

$$(3)f(x)=\ln x=\ln3+\ln\left(1+\frac{x-3}{3}\right)=\ln3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{x-3}{3}\right)^n;$$

$$(4)f(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x-1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}=\frac{x-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-x}{2}\right)^n;$$

$$\begin{aligned}(5)f(x)=\sin x&=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\end{aligned}\qquad\square$$

§14.5.2 参考题　学员: d39

第一组参考题　学员: d39

1. 解答: 令 $S_n(x)=\dfrac{D(x)}{n}$(其中 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数), $|S_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n}$, 由 Weierstrass 判别法知 $S_n(x)\rightrightarrows0$, 但是对每个 n, S_n 在 $[0,1]$ 上处处不连续. $\square$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

2. 解答: 归纳易知 $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)^{(k)}=(-1)^k\dfrac{\ln^k n}{n^x}, k=1,2,\cdots$. 对任意 $\delta>0$, 当 $x\in[1+\delta,+\infty)$, n 充分大时有

$$\left|(-1)^k\frac{\ln^k n}{n^x}\right|\leqslant\frac{\ln^k n}{n^{1+\delta}}=\frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}\cdot\frac{\ln^k n}{n^{\frac{\delta}{2}}}<\frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

由 Weierstrass 判别法知对 $k\in\mathbb{Z}_+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{\ln^k n}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛, 因此

$$\zeta^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\ln^k n}{n^x}$$

注: $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上非一致连续, 非一致收敛, 参见徐森林下册 P270 第 636 题. □

3. 解答: 把 Dirichlet 级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_2}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_2}}$$

当 $x>x_2$ 时, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{x_2}}$ 收敛, $\dfrac{1}{n^{x-x_2}}$ 单调有界, 由 Abel 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$ 收敛. 同时反证易知 $x<x_1$ 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$ 发散. 故当 $x\in(-\infty,x_1]$ 时级数发散, 当 $x\in[x_2,+\infty)$ 时级数收敛. 记 $a_1=x_1,b_1=x_2$, 取 $c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$, 如果 c_1 处级数收敛, 则取 $a_2=x_1,b_2=c_1$, 否则取 $a_2=c_1,b_2=x_2$, 依次进行下去便得到区间长度趋于 0 的闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$, 于是存在唯一的 $r\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 注意这样取得的 $\{a_n\}$ 都使级数发散, $\{b_n\}$ 都使级数收敛. 因此任取 $x<r$, 都可取得一个 a_n 满足 $x<a_n<r$, 从而级数发散, 反之亦然.

注: 事实上是把实数集分割成了两个集合, 一个集合可使 Dirichlet 级数收敛, 另一个则使 Dirichlet 级数发散. 直接应用 Dedekind 分割定理 (第三章第二组参考题第 2 题) 也可得到结论. □

4. 解答:

充分性: 因 $S_n(x)$ 连续, 可设 $|f(x)|\leqslant M$. 对任给的 $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $x\in(1-\delta,1]$ 时有

$$|S_n(x)|=|S_n(x)-S_n(1)|<\varepsilon$$

对此 $\delta>0$, 当 $x\in[0,1-\delta]$ 时有

$$|S_n(x)|\leqslant(1-\delta)^nM\to0\quad(n\to\infty)$$

易见在 $[0,1]$ 上 $S_n(x)\rightrightarrows0$.

必要性: $S_n(x)$ 连续又一致收敛, 故极限函数连续. 当 $x\in[0,1)$ 时显然极限为 0, 由连续性知 $f(1)=0$. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

5. 解答: 易见 $|x-r_n|\leqslant 1$, 故

$$|u_n(x)|=\frac{|x-r_n|}{3^n}\leqslant\frac{1}{3^n}$$

由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 又因为 $u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

设 $x_0\in[0,1]$ 为一无理数, 考虑级数 $(x\neq x_0)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}&=\frac{1}{x-x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_0-r_n|}{3^n}\right)\\&=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

因为

$$\left|\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}\right|\leqslant\frac{|x-r_n-x_0+r_n|}{3^n|x-x_0|}=\frac{1}{3^n}$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}$$

而

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}=\begin{cases}-\dfrac{1}{3^n}, & x_0<r_n\\ \dfrac{1}{3^n}, & x_0>r_n\end{cases}$$

所以

$$f'(x_0)=\sum_{x_0<r_n}\left(\frac{-1}{3^n}\right)+\sum_{x_0>r}\frac{1}{3^n}$$

即 f 在无理点处可微. 再设 x_0 是有理数, 则 $\exists k$, $x_0=r^k$, 同上方法可得 $\sum\limits_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}\dfrac{|x-r_n|}{3^n}$ 是可微的. 但 $\dfrac{|x-r_k|}{3^k}$ 在 $x_0=r_k$ 处不可微. 故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x-r_n}{3^n}=\frac{|x-r_k|}{3^l}+\sum_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$$

在 $x_0=r_k$ 处不可微. □

6. 解答: 假设 $f(x_0)\neq 0$, 则考虑带有 Lagrange 型余项的 Taylor 展开式

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$f(x_0)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)x_0^k}{n!}+\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$$

由于 $a_nf^{(n)}\rightrightarrows 0,x\in[0,1]$, 故对序列 $\xi_n\in[0,1]$ 有

$$n!a_n=\frac{f^{(n)}(\xi_n)a_n}{f(x_0)}\to 0,n\to\infty$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n=0$.

注: 这里需要注意的是虽然在以前我们强调仅有任意阶导在 $x=0$ 处的值都为 0 不能够推断出 $f(x)$ 可以展开为 Maclaurin 级数 (幂级数) 的 (反例例题 6.2.4). 但是本题我们使用的是带有 Lagrange 型余项的 Taylor 展开式, 只需要任意阶可导的条件即可. □

7. 解答: 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 内绝对收敛. 因为绝对收敛的级数可以相乘, 因此当 $x\in(-1,1)$ 时有

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)\overset{def}{=\!=}s_1(x)s_2(x)$$

由 Abel 定理立刻得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}c_n&=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\lim_{x\to1^-}s_1(x)s_2(x)\\&=\lim_{x\to1^-}s_1(x)\cdot\lim_{x\to1^-}s_2(x)=s_1(1)s_2(1)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)\end{aligned}$$

即 $C=AB$.

注: 不用幂级数的方法可以参看周民强第二册 P271 例 3.4.5(3). □

8. 解答:

(1) 参见练习题 6.2.4 第 3 题的解答过程.

(2) 令

$$f(x)=\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\Rightarrow f'(x)=\frac{2\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{x^2+1}}$$

则

$$(x^2+1)f'^2(x)=4f(x)$$

两边求导整理得

$$xf'(x)+(x^2+1)f''(x)=2$$

应用 Leibniz 公式, 两边求 n 次导得

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$xf^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x)+(x^2+1)f^{(n+2)}(x)+2nxf^{(n+1)}(x)+n(n-1)f^{(n)}(x)=0$$

令 $x=0$ 得

$$f^{(n+2)}(0)=-n^2f^{(n)}(0)=0$$

结合 $f'(0)=0, f''(0)=2$ 可得

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \ldots, n=2k-1\\ 2(-1)^n((2k-2)!!)^2, & n=2k\end{cases}$$

那么原来函数的 Maclaurin 级数就显然了.

注: (1)(2) 两问的形式都是 $f(x)f'(x)$ 的形式, 这给予了我们启发, 可以总结出这一类题通用的解题方法.

(3) 在练习题 6.2.4 第 3 题中已经解得了 $(\arcsin x)^2$ 的 Maclaurin 级, 除以 x^2 即可. □

9. 解答: 收敛半径为 1 是显然的. 下面考虑

$$(1-x)f(x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}=a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})x^n$$

当 $x=1$ 时, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})=L-a_1$ 收敛, 因此由 Abel 第二定理, 其在 1 处左连续, 于是令 $x\to1^-$ 有

$$(1-x)f(x)\to a_1+L-a_1=L$$

命题得证. □

10. 解答: 设 $P_n(x)=a(n,m)x^m+\cdots+a(n,1)x+a(n,0)$. 由于 $\{P_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $P(x)$, 故对任给的 $\varepsilon>0, \exists N$, 当 $n,k>N$ 时对 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$|P_n(x)-P_k(x)|<\varepsilon$$

易见多项式 $f(x)=P_n(x)-P_k(x)$ 上有界, 这说明 $f(x)$ 中没有含 x 的项. 这样 $f(x)$ 必然形如 $a(n,0)-a(k,0)$. 由 ε 的任意性可知 $\{a(n,0)\}$ 收敛, 记收敛于 a. 令 $k\to\infty$ 可得

$$P_n(x)-P(x)=a(n,0)-a(k,0)\to a(n,0)-a$$

显然 $P(x)$ 是多项式. □

11. 解答: 设 $P_n(x)=a_D(n)x^D+a_{D-1}(n)x^{D-1}+\cdots+a_1(n)x+a_0(n)$. 由于 $\{P_n(0)\}$ 收敛, 故 $\{a_0(n)\}$ 收敛. 从而, $\forall x\in[0,1]$, 序列

$$a_D(n)x^D+a_{D-1}(n)x^{D-1}+\cdots+a_1(n)x \tag{1}$$

收敛.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

若 $D=1$, 则 $|P_n(x)|=|a_1(n)x+a_0(n)|\leqslant|a_1(n)|+|a_0(n)|=|P_n(1)-P_n(0)|+|P_n(0)|$, 因 $P_n(0)$ 和 $P_n(1)$ 都收敛, 故 $\{P_n(x)\}$ 一致收敛.

以下考虑 $D>1$ 的情形:

(i) 考虑序列

$$a_D(n)+a_{D-1}(n)+\cdots+a_1(n) \tag{2}$$

及序列

$$a_D(n)\left(\frac{1}{2}\right)^D+a_{D-1}(n)\left(\frac{1}{2}\right)^{D-1}+\cdots+a_1(n)\frac{1}{2} \tag{3}$$

由 (1) 可知 (2)(3) 都收敛, 于是又有序列

$$a_D(n)\left(\frac{1}{2}\right)^D+a_{D-1}(n)\left(\frac{1}{2}\right)^D+\cdots+a_1(n)\left(\frac{1}{2}\right)^D \tag{4}$$

收敛. 这样, 令 $b_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k-\left(\frac{1}{2}\right)^D$, (3) − (4) 得

$$a_{D-1}(n)b_{D-1}+a_{D-2}(n)b_{D-2}+\cdots+a_1(n)b_1 \tag{5}$$

收敛. 用同样的方法, 令 $c_k=\left(\frac{1}{3}\right)^k-\left(\frac{1}{3}\right)^D$, 可得

$$a_{D-1}(n)c_{D-1}+a_{D-2}(n)c_{D-2}+\cdots+a_1(n)c_1 \tag{6}$$

收敛.

(ii) 考虑序列 (5)(6), 令 $\lambda=\frac{c_1}{b_1}$, 由 $\lambda\cdot(5)-(6)$ 可得

$$a_{D-2}(n)(\lambda b_{D-2}-c_{D-2})+a_{D-3}(n)(\lambda b_{D-3}-c_{D-3})+\cdots+a_1(n)(\lambda b_1-c_1) \tag{7}$$

收敛. 用同样的方法, 取 $\mu=\frac{d_1}{b_1}$, 令 $d_k=\left(\frac{1}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}\right)^D$, 可得

$$a_{D-2}(n)(\mu b_{D-2}-d_{D-2})+a_{D-3}(n)(\mu b_{D-3}-d_{D-3})+\cdots+a_1(n)(\mu b_1-d_1) \tag{8}$$

(iii) 与 (ii) 类似地考虑序列 (7)(8), 又可消去含 $a_{D-2}(n)$ 的项, 得两个收敛序列

$$a_{D-3}(n)B_{D-3}+\cdots+a_1(n)B_1,\qquad a_{D-3}(n)C_{D-3}+\cdots+a_1(n)D_1$$

其中 $B_k,C_k\neq0,(k=1,2\cdots,D-3)$. 如此进行下去, 可得序列 $\{a_1(n)\},\{a_2(n)\},\cdots,\{a_D(n)\}$ 均收敛. 则

$$|P_n(x)|\leqslant|a_D(n)|+|a_{D-1}(n)|+\cdots+|a_1(n)|$$

由 Weierstrass 判别法知 $P_n(x)$ 于 $[0,1]$ 上一致收敛.

注: (1)$\{P_n(x)\}$ 的系数收敛, 可见极限函数也是多项式.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2) 这里的 $[0,1]$ 区间改作任意的闭区间 $[a,b]$. □

12. 解答: 必要性是第 10 题的直接推论. 下证充分性:

由于 $f(x)$ 是多项式, 故可令 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$, 则当 $k=0,1,\cdots,m$ 时 $a_k=\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(0)$, 当 $k>m$ 时, $f^{(k)}(x)=0$. 这样, 当 $n>m$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n&=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(0)x^m\\&=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m=f(x)\end{aligned}$$

从而 $\forall\varepsilon>0,\exists N=m$, 当 $n>N$ 时, $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-f(x)\right|<\varepsilon$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 一致收敛于 $f(x)$.

注:$(-\infty,+\infty)$ 改为任意闭区间 $[a,b]$ 后结论未必成立. 例如令 $P_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$, 则 $\{P_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 e^x, 但 e^x 不是多项式. 本质原因就在于 $\{P_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致收敛. □

13. 解答: 易知

$$C(-y-1)=\binom{-y-1}{2003}=\frac{(-1)^{2003}(y+1)(y+2)\cdots(y+2003)}{2003!}$$

代入原式后注意到

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-\frac{1}{2003!}\int_0^1\left[(y+1)(y+2)\cdots(y+2003)\right]'\mathrm{d}y\\&=-\frac{(2004-1)2003!}{2003!}=-2003\end{aligned}$$

注: 从证明过程可见 2003 可以改为任意正整数 k 作为推广结论. □

14. 解答: 记

$$f(m,n)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n}{3^m\left(n3^m+m3^n\right)}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n^2}{n3^m\left(n3^m+m3^n\right)}$$

显然 $f(m,n)$ 中 m,n 地位相同, 即 $f(m,n)=f(n,m)$. 因此

$$f(m,n)=\frac{f(m,n)+f(n,m)}{2}$$

于是

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n^2}{n3^m\left(n3^m+m3^n\right)} &= \frac{1}{2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2n^2}{n3^m\left(n3^m+m3^n\right)}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2m^2}{m3^n\left(m3^n+n3^m\right)}\right]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2m^2}{m3^n+n3^m}\left(\frac{1}{n3^m}+\frac{1}{m3^n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2m^2}{m3^n+n3^m}\frac{m3^n+n3^m}{mn3^m3^n}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{nm}{3^m3^n}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{3^m}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\right)^2=\frac{9}{32}\end{aligned}$$ □

15. 解答: 记事件 A 为甲投中六点, 事件 B 为乙投中六点, 则所求概率为

$$\begin{aligned}P &= P(A)+P(\bar{A})P(\bar{B})P(A)+P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{A})P(\bar{B})P(A)+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}P(A)\left[P(\bar{A})P(\bar{B})\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{25}{36}\right)^n=\frac{6}{11}\end{aligned}$$ □

16. 解答: 设第 n 年的这一天需要提取 n 万元所需要的本金为 a_n, 则得有本息和 $a_n(1+0.01a)^{n-1}\geqslant n$, 即

$$a_n\geqslant\frac{n}{(1+0.01a)^{n-1}}$$

记 $x=\dfrac{1}{1+0.01a}$, 总本金至少得为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(100+a)^2}{a^2}$$ □

第二组参考题 学员: d39

1. 解答: 与命题 14.2.4 的证明类似. 对任给的 $\varepsilon>0$, 定义

$$\{A_n\}=\{x\in[a,b]|\exists i,j\geqslant n\ s.t.\ |f_i(x)-f_j(x)|\geqslant\varepsilon\}$$

由于 f_n 在 $[a,b]$ 上收敛, 则 A_n 为单调递减序列且 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$. 记

$$\alpha_n=\sup\{m(E)|E为含于A_n中的初等集\}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

由 Lewin 引理 (命题 14.2.5) 得 $\alpha_n \to 0 (n \to \infty)$. 故 $\exists N, \forall n > N$, 对于 A_n 中的初等集 E 有 $m(E) < \varepsilon$. 下证对 $\forall m, n > N$ 存在常数 K 使得 $\int_a^b |f_n - f_m| \leqslant K\varepsilon$.

对 $\forall m, n > N$, 存在阶梯函数 $S(x)$ 使得在 $[a, b]$ 上有

$$0 \leqslant S(x) \leqslant |f_n(x) - f_m(x)|$$

再定义 $E = \{x \in [a, b] | S(x) \geqslant \varepsilon\}$, $F = [a, b] \backslash E$; 则 $E \subset A_n$ 从而 $m(E) < \varepsilon$. 于是对 $\forall x \in F$ 有 $S(x) < \varepsilon$. 又 $\{f_n\}$ 一致有界, 设 $|f_n| \leqslant M$, 于是有

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_E S(x)\mathrm{d}x + \int_F S(x)\mathrm{d}x \leqslant 2M \cdot m(E) + (b-a)\varepsilon \leqslant (2M + b - a)\varepsilon$$

因此 $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 是 Cauchy 列, 必然收敛. □

2. 解答: 在练习题 14.2.4 第 8 题中已经证得 f 可积, 于是由 $f_n \rightrightarrows f$ 可知 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, $\forall n > N$ 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

注: 也可用定积分的定义去证, 参见裴礼文 P531 例 5.2.55. □

3. 解答: 由于 f 在 $[a, b]$ 上连续, 故也一致连续, 从而

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b] \text{且} |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

将 $[a, b]$ 划分为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

满足 $0 < x_{i+1} - x_i < \delta, i = 0, 1, 2, \cdots, m-1$, 于是

$$\forall i = 0, 1, 2, \cdots, m, \forall x \in [x_i, x_{i+1}], |f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

另一方面由题设条件 f_n 逐点收敛于 f, 于是 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2 \cdots, m$. 即

$$\exists N, \forall i = 0, 1, 2, \cdots, \forall n > N, |f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

设 $x \in [a, b]$, 于是 $\exists i$ 使得 $x \in [x_i, x_{i+1}]$. 不妨设 f_n 单调递增, 则有

$$f_n(x_i) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(x_{i+1})$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

从而对 $\forall n > N$ 有

$$[f_n(x_i) - f(x_i)] + [f(x_i) - f(x)] \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant [f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1})] + [f(x_{i+1}) - f(x)]$$

联系 (1)(2) 式可知

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

即

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

即 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a,b]$. □

4. 解答: 对 $\forall x \in [a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 由于 $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, 所以 $f(x) \geqslant f_1(x)$. 而 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上有下界 m, 则 m 也是 $f(x)$ 的下界, 从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有下确界. 记 $\mu = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. 下面证明 μ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

由下确界定义

$$\exists x_m \in [a,b], m = 1,2,\cdots, s.t. \lim_{m\to\infty} f(x_m) = \mu$$

注意到 $\{x_m\}$ 为有界数列, 因此存在收敛子列 $\{x_{m_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = x_0 \in [a,b]$$

假设 $f(x_0) \neq \mu$, 则 $\exists \mu_1 > \mu, s.t. f(x_0) > \mu_1 > \mu$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 故 $\exists N$, 使得 $f_N(x_0) > \mu_1$. 又 f_N 连续, 故 $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时有 $f_N(x) > \mu_1$.

再联系 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x_0$, 则存在 K, 当 $k > K$ 时 $|x_{m_k} - x_0| < \delta$. 此时便有

$$f(x_{m_k}) \geqslant f_N(x_{m_k}) > \mu_1$$

则

$$\mu = \lim_{k\to\infty} f(x_{m_k}) \geqslant \mu_1 > \mu$$

矛盾. 因此 $f(x_0) = \mu$, 命题得证.

注: 如果把 $[a,b]$ 换成 (a,b), 则只要取 $f_n(x) \equiv x$, 则 $f(x) = x$ 在 (a,b) 上没有最值. 如果把最小值换成最大值, 则可令

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-n)x + (n-1), & 1 - \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 - \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上无最大值. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

5. 解答:

(1) 易知存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$, 设 $x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$ 则有

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x_0)=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$$

由 Cauchy 准则, 对任给的 $\varepsilon>0$, $\exists N_{k_\alpha},\forall n_{k_1},n_{k_2}>N_{k_\alpha}$, 有

$$\left|f_{n_{k_1}}(x_0)-f_{n_{k_2}}(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

由 $\{f_n'\}$ 一致收敛, 则存在 N_{k_β}, $\forall n_{k_1},n_{k_2}>N_{k_\beta}$, 有

$$|f'_{n_{k_1}}(x_0)-f'_{n_{k_2}}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

令 $N_{k_\gamma}=\max\{N_{k_\alpha},N_{k_\beta}\}$, 则当 $n_{k_1},n_{k_2}>N_{k_\gamma}$ 时, 对 $\forall x\in[a,b]$ 有

$$\begin{aligned}\left|f_{n_{k_1}}(x)-f_{n_{k_2}}(x)\right|&=\left|f_{n_{k_1}}(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'_{n_{k_1}}-f_{n_{k_2}}(x_0)-\int_{x_0}^{x}f'_{n_{k_2}}\right|\\&\leqslant\left|f_{n_{k_1}}(x_0)-f_{n_{k_2}}(x_0)\right|+\int_{x_0}^{x}\left|f'_{n_{k_1}}-f'_{n_{k_2}}\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x-x_0|\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则,$\{f_{n_k}\}$ 于 $[a,b]$ 上一致收敛.

(2) 任给 $\varepsilon>0$, 因为 $f_{n_k}\rightrightarrows f,x\in[a,b]$, 所以 $\exists N_{k_\alpha}\in\mathbb{N}$, 当 $n_k>N_{k_\alpha}$ 时,$\forall x\in[a,b]$ 有

$$|f_{n_k}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|<\frac{\varepsilon}{2}$$

由 $\{f_{n_k}\}$ 的一致收敛性及连续性知 f 连续且一致连续, 即 $\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又存在 N_{k_β}, 当 $n_k>N_{k_\beta}$ 时 $|x_{n_k}-x_0|<\delta$, 此时

$$|f(x_{n_k})-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N_{k_\gamma}=\max\{N_{k_\alpha},N_{k_\beta}\}$, 则当 $n_k>N_{k_\gamma}$ 时有

$$|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_0)|\leqslant|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|+|f(x_{n_k})-f(x_0)|<\varepsilon$$

这说明

$$x_0=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x_{n_k})=f(x_0)$$

(3) 练习题 14.2.4 第 8 题中已经证明. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

从而对 $\forall n$

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 于是对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}_+$

$[f_n(x$

$v_{N+1}(x)+v_{N+2}(x)+\cdots+v_{N+p}(x)<\varepsilon$, 而由已知条件知

$$(x)\Big| \leqslant \sum_{n=N+1}^{N+p} |u_n(x)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{N+p} v_n(x) < \varepsilon$$

一致收敛. □

7. 解答: 先考虑 $x\in(0,\pi)$(端点处结论平凡). 当 $n\leqslant\dfrac{\sqrt{\pi}}{x}$ 时, 始终有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{|\sin kx|}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{k} = nx \leqslant \sqrt{\pi}$$

如果 $n>\dfrac{\sqrt{\pi}}{x}$, 取 $m=\left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{x}\right]$, 记 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}$, 则

$$2\sin\frac{x}{2}\left[S_n(x)-S_m(x)\right] = -\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\left[\cos(k+1/2)x-\cos(k-1/2)x\right]}{k}$$

$$=\frac{\cos(m+1/2)x}{m+1} - \sum_{k=m+1}^{n-1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{\cos(n+1/2)x}{n}$$

可知

$$|S_n(x)-S_m(x)| \leqslant \frac{2}{(m+1)\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)} \leqslant 2\frac{x/\sqrt{\pi}}{2\sin\dfrac{x}{2}} \leqslant 2\frac{\pi/2}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}$$

综上可知

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{[\sqrt{\pi}/x]}\frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=[\sqrt{\pi}/x]+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant 2\sqrt{\pi}$$

由奇偶性与周期性可知原不等式对所有 n 和 x 成立.

注: 事实上有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \mathrm{Si}(\pi) = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \approx 1.85$$

并且右边的常数不能用更小的常数代替. □

8. 解答: 参见第十一章第二组参考题第 15 题. □

9. 解答: 考虑

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{x}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\cdots+\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

因而

$$e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right]x^k \tag{1}$$

$$e^{|x|}-\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n=\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right]|x|^k \tag{2}$$

对 (1)(2) 用三角不等式, 题目中的左边不等式就得证. 再考虑

$$\frac{x^2}{2n}\cdot e^{|x|}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|x|^k}{2n(k-2)!} \tag{3}$$

对比 (2)(3) 式的系数, 要证题目中右边不等式成立, 即要证

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}<\frac{1}{2n(k-2)!}\\ \Longleftarrow&1-\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}<\frac{k(k-1)}{2n}\\ \Longleftarrow&1-\frac{k(k-1)}{2n}<\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

由 Bernoulli 不等式 (命题 1.3.1), 原不等式得证. □

10. 解答:

(1) 由第十三章第二组参考题第 19 题的结论可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$, 则存在 $N>0$, 当 $n>N$ 后有 $|a_n|\leqslant\dfrac{1}{n}$, 于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$$

这说明收敛半径 $R\geqslant 1$, 所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 内收敛.

(2) 考虑

$$\begin{aligned}&(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^{n+2}\\ =&\sigma_1+(2\sigma_2-2\sigma_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)\sigma_{n+1}-2n\sigma_n+(n-1)\sigma_{n-1}\right]x^n\\ =&a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(S_0+\cdots+S_n)-2(S_0+\cdots+S_{n-1})+(S_0+\cdots+S_{n-2})\right]x^n\\ =&a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[S_n-S_{n-1}\right]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(3) 利用公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}$$

以及 (2) 的结论可知

$$\begin{aligned}|S(x)-S|&=\left|(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n-(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^nS\right|\\&=(1-x)^2\left|\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-S)x^n\right|\\&\leqslant(1-x)^2\sum_{n=0}^{N}(n+1)|\sigma_{n+1}-S|+(1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}(n+1)x^n|\sigma_{n+1}-S|\end{aligned}$$

上述 N 满足对 $\forall\varepsilon>0,\forall n>N$ 都有

$$|\sigma_{n+1}-S|<\frac{\varepsilon}{2}$$

再由 $(1-x)^2\to0(x\to1^-)$ 即存在 $\delta>0$, 在 $(1-\delta,1)$ 内有

$$(1-x)^2<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{N}(n+1)|\sigma_{n+1}-S|}$$

于是 $|S(x)-S|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=S$. □

11. 解答: 由题设知, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1,s.t.$ 当 $n>N_1$ 时 $\left|\dfrac{b_n}{a_n}-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_kx^k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}-A\right|&=\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-Aa_k)x^k\right|}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\left|\dfrac{b_k}{a_k}-A\right|x^k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}\\&=\frac{\sum\limits_{k=1}^{N_1}a_k\left|\dfrac{b_k}{a_k}-A\right|x^k+\sum\limits_{k=N_1+1}^{n}a_k\left|\dfrac{b_k}{a_k}-A\right|x^k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}\\&\leqslant\frac{M}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\sum\limits_{k=N_1+1}^{n}a_kx^k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}<\frac{M}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k}+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 1 处发散, 因此存在 $\delta>0,N_2\in\mathbb{Z}_+$, 当 $x\in(1-\delta,1)$ 且 $n>N_2$ 时有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^k > \frac{2M}{\varepsilon}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则可得

$$\left| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k x^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k} - A \right| < \varepsilon$$

命题得证. □

12. 解答: 由 Abel 第二定理 (命题 14.3.2) 显然. □

13. 解答: 考虑 Taylor 公式的积分型余项 (命题 11.4.3)

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t$$

注意到

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \xlongequal{t=ux} \frac{1}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(ux)(1-u)^n \mathrm{d}u$$

由于 $f^{(n+2)}$ 非负, 所以 $f^{(n+1)}$ 递增, 于是对 $\forall x \in [0, r)$, 有

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(r)}{r^{n+1}}$$

又有 $R_n(r) \leqslant f(r)$, 于是得到

$$R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} f(r) \to 0, \quad n \to \infty$$

所以在 $[0, r)$ 上 $f(x)$ 可展成 Maclaurin 级数. □

14. 解答: 考虑

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n) x^n \end{aligned}$$

由此验证

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, a_0 = a_1 = 1$$

另一方面

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x-x^2} &= \frac{2}{\sqrt{5}(2x+\sqrt{5}+1)} + \frac{2}{\sqrt{5}(-2x+\sqrt{5}-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]x^n\end{aligned}$$

由此可见

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是熟知的, 可参看例题 2.6.2 的注. □

15. 解答: 考虑等式

$$(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = (1+x)^{\alpha+\beta}$$

用幂级数表示, 上式成为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\beta}{n}x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{n}x^n$$

比较两端 x^n 系数即得证等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

令 $\alpha=\beta=n$ 则有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

注: 利用组合学的方法证明参见 Richard A. Brualdi《组合数学》P83. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第十五章　Fourier 级数

§15.1.5　练习题　学员: d39

1. 解答:

(1) 注意到

$$\sin^3 x+\cos^4 x=\sin x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$

它是一个三角多项式, 由例题 15.1.1 的结论可知它的 Fourier 级数是它本身.

(2) 在例题 15.1.2 中我们已知

$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$$

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

$$x^3\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2\pi^2}{n}-\frac{12}{n^3}\right)\sin nx$$

因此

$$ax^3+bx^2+cx+d\sim\frac{\pi^2+3d}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\left(\frac{2\pi^2a+2c}{n}-\frac{12a}{n^3}\right)\sin nx+\frac{4(-1)^nb}{n^2}\cos nx\right]$$

注: Fourier 变换是线性变换, 即如果 $f_1\sim g_1, f_2\sim g_2$ 则 $af_1+bf_2\sim ag_1+bg_2$. □

2. 解答: 由题意要求 $b_{2n}=0$, 即

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin 2nx\mathrm{d}x=0$$

由于 $\sin 2nx$ 在 $[0,\pi]$ 上关于其中点为奇函数, 即要 $f(x)$ 关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为偶函数, 延拓方式为

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\ f(\pi-x), & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\\ 0, & x=0,\dfrac{\pi}{2}\\ -f(-x), & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

□

3. 解答: $f(x)$ 为奇函数, 可展开为正弦级数. 又 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为偶函数, 由上题结论可知

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

我们计算

$$b_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}c\sin(2n-1)x\mathrm{d}x=\frac{2c}{\pi}\cdot\frac{1}{2n-1},\quad b_{2n}=a_n=0$$

于是

$$S_n=\frac{2c}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

另一方面, 注意到

$$\sin 2nt=2\sin t(\cos t+\cos 3t+\cdots+\cos(2n-1)t)$$

于是有

$$\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)t\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

因此有

$$S_n(x)=\frac{2c}{\pi}\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}\mathrm{d}t$$

□

4. 解答: 分部积分可知

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}f(x)\mathrm{d}x$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}f(x)\mathrm{d}x$$

由 Riemann 引理 (例题 10.2.6) 可知

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0\Rightarrow a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\exists M>0,\quad nb_n\leqslant\frac{|f(\pi)-f(-\pi)|}{\pi}+M\Rightarrow b_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

如果还有 $f(\pi)=f(-\pi)$, 则可见

$$\lim_{n\to\infty}nb_n=0\Rightarrow b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

注: 推广结论 (命题 15.1.4) 参见徐森林第二册 P248 定理 16.1.5. □

5. 解答: 记 $f(x)\leqslant M, x\in(-\pi,\pi)$. 设

$$-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_k=\pi$$

f 在 (x_{i-1},x_i) 上单调, $i=1,\cdots,k$. 由积分第二中值定理 (命题 10.2.2) 可知

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$|a_n| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\left|f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{\xi_i}\cos nx\mathrm{d}x + f(x_i)\int_{\xi_i}^{x_i}\cos nx\mathrm{d}x\right|$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\left|f(x_{i-1})\frac{\sin n\xi_i - \sin nx_{i-1}}{n} + f(x_i)\frac{\sin nx_i - \sin n\xi_i}{n}\right| \leqslant \frac{2kM}{n\pi}$$

故有 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. 同理可知 $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

注: (1) 这里 $f(x_0)$ 与 $f(x_k)$ 为 $f(-\pi+0)$ 和 $f(\pi-0)$.

(2) 也可借助全变差或 Stieltjes 积分证明, 参见裴礼文 P586 例 5.4.6. □

6. 解答: 设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

考虑

$$\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right]\sin x$$

中 $\sin nx$ 的系数. 由积化和差公式, 该项系数只与 $\cos(n-1)x\sin x$ 与 $\cos(n+1)x\sin x$ 有关, 即知 $\sin nx$ 的系数为 $\frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2}$. 再直接计算 $\sin nx$ 的系数

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(n-1)x - \cos(n+1)x)\mathrm{d}x = \frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2}$$

可见这是一致的. 同理可知 $\cos nx$ 的系数也是一致的. 由此命题得证. □

7. 解答: 在 $[a,b]$ 上的定积分是一种内积运算, 因此本题可以推广到一般的内积形式. 我们用 $\|\cdot\|$ 表示范数 $\langle\,,\rangle$ 表示内积. 我们注意到

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|^2 = \left\langle f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, f - \sum_{l=1}^{n} a_l e_l\right\rangle$$
$$= \langle f,f\rangle - \sum_{l=1}^{n} a_l\langle f,e_l\rangle - \sum_{k=1}^{n} a_k\langle e_k,f\rangle + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k a_l\langle e_k,e_l\rangle$$
$$= \langle f,f\rangle - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\langle f,e_k\rangle + \sum_{k=1}^{n} a_k a_l\delta_{kl}$$
$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k c_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)^2$$
$$\geqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

易见当且仅当 $a_k = c_k, k = 1,2,\cdots,n$ 时 $\left\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|^2$ 达到最小值.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\|=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}c_k^2$$

此时也有

$$\sum_{k=1}^{n}c_k^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k^2+\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\right\|^2=\|f\|^2$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n^2$ 部分和有界从而收敛. □

8. 解答: 设 $G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$, 则 $G(0)=G(1)=\cdots=0, G(x)=G(x+1)$ 且

$$G(nx)=\int_0^{nx}g(t)\mathrm{d}t=\int_{[nx]}^{nx}g(t)\mathrm{d}t=\int_0^{nx-[nx]}g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|g(t)|\mathrm{d}t\overset{def}{=\!=}M$$

我们有

$$a_n=\int_0^1f(x)g(nx)\mathrm{d}x=f(x)\frac{G(nx)}{n}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{G(nx)}{n}f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\int_0^1G(nx)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow a_n^2\leqslant\frac{M^2}{n^2}\left(\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2$$

因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^2$ 收敛. □

§15.2.7 练习题 学员: d39

1. 解答: 将 $f(x)$ 延拓为 $(-\pi,\pi)$ 上的偶函数并定义 $f(0)=0$, 则

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}x\cos nx\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}-\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(2k-1)^2}, & n=2k-1\\0, & n=2k\\\dfrac{\pi}{2}, & n=0\end{cases}\qquad(k\in\mathbb{Z}_+)\end{aligned}$$

于是得到

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

令 $x=0$, 得到

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=0=\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$$

□

2. 解答:

(1) 作偶延拓, 则

$$a_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\left[\int_0^{a/2}x\cos\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x+\int_{a/2}^{a}(a-x)\cos\frac{n\pi x}{a}\right]$$
$$=\begin{cases}\dfrac{a}{k^2\pi^2}[(-1)^k-1], & n=2k\\ 0, & n=2k-1\\ \dfrac{a}{2}, & n=0\end{cases}\qquad(k\in\mathbb{Z}_+)$$

$$f(x)\sim\frac{a}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{a}$$

(2) 作奇延拓, 则

$$b_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\left[\int_0^{a/2}x\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x+\int_{a/2}^{a}(a-x)\sin\frac{n\pi x}{a}\right]$$
$$=\begin{cases}\dfrac{4a(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}\qquad(k\in\mathbb{Z}_+)$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{a}$$

□

3. 解答: 不难计算得到 (徐森林第三册 P257 例 16.1.4)

$$\cos\alpha x\sim\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sin\alpha x}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right)\cos nx\qquad(1)$$

在 (1) 式中令 $x=\pi$ 得

$$\cos\alpha\pi=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right)$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

令 $\alpha = y/\pi$ 得

$$\cos y = \frac{\sin y}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \sin y \left(\frac{1}{y+n\pi} + \frac{1}{y-n\pi} \right)$$

令 $y = x$ 整理即得

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

类似地, 在 (1) 式中令 $x = 0$, $\alpha = y/\pi$, 再令 $y = x$ 整理即得

$$\csc x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

从 (1) 式中也不难得出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1 - \pi\alpha \cot \alpha\pi}{2\alpha^2}$$

□

4. 解答:

(1)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx = -\frac{2(-1)^n + 2}{n^2 - 1}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \sin nx = 0$$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n + 2}{n^2 - 1} \cos nx = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 - 1} \cos 2nx$$

(2)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} ax \cos nx \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} bx \cos nx \mathrm{d}x \right] = \frac{a-b}{n^2\pi} [1 - (-1)^n], a_0 = \frac{b-a}{2}\pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} ax \sin nx \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} bx \sin nx \mathrm{d}x \right] = \frac{a+b}{n} (-1)^{n+1}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(a-b)}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} (a+b) \sin nx \right]$$

□

5. 解答:

(1)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-2x} \sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n - e^{-2\pi}(-1)^n}{n^2 + 4}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n - e^{-2\pi}(-1)^n}{n^2 + 4} \sin nx$$

(2)

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^1\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{4k-2-2(-1)^{k-1}}{(4k^2-4k)\pi}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z}_+),$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-2-2(-1)^{n-1}}{(4n^2-4n)\pi}\sin(2n-1)x$$ □

6. 解答:

(1)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{2[1+(-1)^n]}{n^2},a_0=\frac{\pi^2}{3}$$

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$$

(2)

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\pi/4}\sin 2x\cos 2nx\mathrm{d}x+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos 2nx\mathrm{d}x\right]\\&=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{k-1}(2k-1)-1}{8k^2-8k}+\dfrac{(-1)^k}{4k-2}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\\ \dfrac{\pi+2}{4}, & n=0\end{cases}\end{aligned}$$

$$f(x)\sim\frac{\pi+2}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)-1}{8n^2-8n}+\frac{(-1)^n}{4n-2}\right]\cos(2n-1)x$$ □

7. 解答:$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上是奇函数, 则

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n},a_n=0$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin nx}{n}$$

对每个 $x\in(-\pi,\pi]$, 可由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\sin nx}{n}$ 点点收敛, 但对 $\forall N$, 取 $x_n=\dfrac{\pi}{4(n+1)}\in(-\pi,\pi]$ 有

$$\left|\frac{2\sin(n+1)\cdot\frac{\pi}{4(n+1)}}{n+1}+\cdots+\frac{2\sin 2n\cdot\frac{\pi}{4(n+1)}}{2n}\right|\geqslant 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{2n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

由 Cauchy 准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\sin nx}{n}$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上非一致收敛. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

8. 解答: 由第十章第一组参考题第 5 题的结论可知, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在连续函数 $g(x)$ 使得有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$$

设

$$g(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

记右端的前部分和为 $S_n(x)$ 且 $S_0=\frac{a_0}{2}$, 则对 $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}$$

为三角多项式. 且由 Fejér 定理 (命题 15.2.4) 知 $\sigma_n(x)\rightrightarrows g(x)$, 于是有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_n(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$$

则我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\sigma_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)-\sigma_n(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

命题得证. □

9. 解答: 如果右边级数一致收敛, 则易见其和函数 $g(x)$ 连续, 且右边级数就是 $g(x)$ 的 Fourier 级数. 因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的 Fourier 级数相同, 由命题 15.2.3 知 $f(x)=g(x)$. □

10. 解答: 容易计算得到

$$f(x)\sim\frac{a}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin na}{n\pi}\cos nx$$

这里

$$a_0=\frac{2a}{\pi},a_n=\frac{2\sin na}{n\pi},b_n=0$$

由 Parseval 恒等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{a\pi-a^2}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{a\pi-a^2}{2}$$

□

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§15.3.2　参考题　学员: d39

1. 解答:

(1) 由 f 可积知 f 有界, 则据广义的积分第二中值定理 (第十二章第一组参考题第 13 题) 有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x &= f(0^+)\int_0^{\xi}\sin nx\mathrm{d}x + f((2\pi)^-)\int_{\xi}^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x\\ &= f(0^+)\frac{1-\cos n\xi}{n} + f((2\pi)^-)\frac{\cos n\xi - 1}{n}\\ &= \frac{1-\cos n\xi}{n}\left[f(0^+) - f((2\pi)^-)\right] \geqslant 0\end{aligned}$$

(2) 考虑

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}\sin nx = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}[-f'(x)]\sin nx$$

对 $f'(x)$ 用第 (1) 问的结论即得证. □

2. 解答: 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t\\ =&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} + \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\right) f\left(\frac{t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t\\ =&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_0^{\pi} f\left[\frac{x+(2k-2)\pi}{n}\right]\cos x\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} f\left[\frac{x+(2k-1)\pi}{n}\right]\cos x\mathrm{d}x\right\}\\ =&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}\left\{f\left[\frac{x+(2k-2)\pi}{n}\right] - f\left[\frac{x+(2k-1)\pi}{n}\right]\right.\\ &\left. -f\left[\frac{(2k-1)\pi - x}{n}\right] + f\left[\frac{2k\pi - x}{n}\right]\right\}\cos x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 f 的凸性可知

$$\frac{f\left[\frac{x+(2k-2)\pi}{n}\right] - f\left[\frac{x+(2k-1)\pi}{n}\right]}{-\pi} \leqslant \frac{f\left[\frac{(2k-1)\pi - x}{n}\right] - f\left[\frac{2k\pi - x}{n}\right]}{-\pi}$$

于是就有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \geqslant 0$$

命题得证. □

3. 解答:

(1)F_h 是 f 的变上限积分函数, 由于 f 是连续的, 因此

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$F_h'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

也是连续的. 即 F_h 是连续可微的. 又

$$F_h(x+2\pi)=\int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h}f(t)\mathrm{d}t=\int_{x-h}^{x+h}f(t+2\pi)\mathrm{d}t=F_h(x)$$

因此 F_h 以 2π 为周期.

(2) 注意到 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致连续, 因此

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall|x'-x''|<\delta,|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

我们只要取 $0<h<\delta/2$, 则有

$$|f(x)-F_h(x)|=\frac{1}{2h}\left|\int_{x-h}^{x+h}f(x)-f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(x)-f(t)|\,\mathrm{d}t<\varepsilon$$

(3) 前面已证得 F_h 以 2π 为周期, 连续, 导函数可积且平方可积, 由命题 15.2.8 知 F_h 的 Fourier 级数 P 一致收敛于 F_h. 记 P 的部分和为 P_n, 则对任给的 $\varepsilon>0$ 对所有 x 有

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant|f(x)-F_h(x)|+|F_h(x)-P_n(x)|<2\varepsilon$$

由 ε 的任意性即得 Weierstrass 第二定理.

(4) 设 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在 $[x-h,x+h]$ 上逐项积分得

$$\begin{aligned}
F_h(x)&=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2h}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x-h}^{x+h}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2h}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}[\sin n(x+h)-\sin n(x-h)]+\frac{b_n}{n}[\cos n(x-h)-\cos n(x+h)]\right)\\
&=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2nh}\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n\sin nh\cos nx+2b_n\sin nh\sin nx)\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}a_n\cos nx+\frac{\sin nh}{nh}b_n\sin nx\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_0=a_0,A_n=\frac{\sin nh}{nh}a_n,B_n=\frac{\sin nh}{nh}b_n,n=1,2,\cdots$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

注: 其他解法参见徐森林下册 P402 第 729 题. □

4. 解答:

(1)

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\mathrm{d}x \xlongequal{x+t=u} \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{d}u = a_0^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{x+t=u} \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos n(u-t)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos nu\cos nt+\sin nu\sin nt)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\mathrm{d}u+\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\mathrm{d}u\right]\\ &= a_n^2+b_n^2\end{aligned}$$

同理可知

$$\begin{aligned}B_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nx\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\mathrm{d}u-\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nt\mathrm{d}u\right]\\ &= a_nb_n-b_na_n=0\end{aligned}$$

(2) 由 Bessel 不等式 (命题 15.1.7) 知 $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛, 于是由

$$\left|(a_n^2+b_n^2)\cos nx\right| \leqslant a_n^2+b_n^2$$

知级数

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) 由练习题 15.2.7 第 9 题知其和函数就是 $F(x)$, 因此 $F(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 $F(x)$. 因此有

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\cos nx$$

令 $x=0$ 即得 $f(x)$ 的 Parseval 等式

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

注: 其他解法参见徐森林下册 P404 第 730 题. □

5. 解答:

(1) 考虑

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}&=\int_0^x\sum_{k=1}^{n}\cos kt\mathrm{d}t=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\\&=-\frac{x}{2}+\int_0^x\left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right]\sin(2n+1)\frac{t}{2}\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时, 第二项由 Riemann 引理趋于 0, 而第三项

$$\int_0^x\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{t}\mathrm{d}t\xrightarrow{u=(2n+1)t/2}\int_0^{(2n+1)x/2}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$$

(这是熟知的 Dirichlet 积分 (例题 12.3.6))

这就得到了

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$$

(2) 在 (1) 式的结果中替换 x 为 $2x$, 则有

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$$

此时易见

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}=\frac{\pi}{4}$$ □

6. 解答:

(1) 在第 5 题第 (1) 问中令 $x=2$ 即可;

(2) 第 5 题第 (2) 问已证.

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(\pi-x)}{n}=\frac{x}{2}$$

(4) 对 (3) 式逐项积分即可 (例题 15.1.2 中有证);

(5) 对 (2) 式两边同乘 $\frac{4}{\pi}$ 后逐项积分即可;

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(6) 由 (4) 可知

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k)^2}-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

结合 (5) 可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k)^2}=\frac{6x^2-6\pi x+\pi^2}{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}$$

□

7. 解答: 对 (1) 作偶延拓 (2) 作奇延拓, 则都满足下一题 Wirtinger 不等式的条件, 结论显然. □

8. 解答: 将 f 延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数, 周期为 2π, 则 f 有 Fourier 展开

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$$

由命题 15.1.2 知 f' 的 Fourier 展开开为

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)$$

根据 Parseval 等式就有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x&=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\\&\leqslant\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2a_n^2+n^2b_n^2\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a_n=b_n=0,\forall n\geqslant 2$, 即 $f(x)=A\cos x+B\sin x$. □

9. 解答: 由周期性, 我们只考虑在一个周期上的情形. 由题设 f 和 f' 按段连续, 即只有第一类间断点并且按段光滑. 不妨假设在 $[-\pi,\pi]$ 上只有 $x=0$ 一个间断点, 则 $f(0\pm 0)$ 存在. 记

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2},x\in(0,\pi]\\\dfrac{-\pi-x}{2},x\in[-\pi,0)\\0,x=0\end{cases}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

考虑

$$F(x)=\begin{cases} f(x)-\dfrac{f(0^+)-f(0)}{S(0^+)-S(0)}S(x), x\in[0,\pi] \\ f(x)-\dfrac{f(0^-)-f(0)}{S(0^-)-S(0)}S(x), x\in[-\pi,0] \end{cases}$$

易验证 $F(0^+)=F(0^-)=F(0)$, 因此 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 按段光滑, 从而 $F(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 $F(x)$. 又由例题 14.1.7 知 $S(x)$ 在 $[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ 上一致收敛, 因此 $f(x)$ 在任何闭区间 $[a,b]\subset[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ 内的 Fourier 级数也是一致收敛的.

注: $f(x)=F(x)+kS(x)$, Fourier 变换是线性的以及一致收敛级数线性相加还是一致收敛的 (且作为 Fourier 级数一致收敛到自身). □

10. 解答:

(1) 在第 5 题第 (1) 问中令 $x=1$ 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\pi-1}{2}$$

在第 6 题第 (6) 问中令 $x=2$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{4n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{2n^2}=\frac{6-6\pi+\pi^2}{6}$$

利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$ 整理得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}$$

(2) 考虑

$$f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x), x\in[0,2\pi]$$

容易计算它的 Fourier 级数为 (裴礼文 P593 例 5.4.11)

$$\frac{1}{4}x(2\pi-x)=\frac{1}{6}\pi^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

逐项积分两次可知

$$\frac{1}{12}\pi^2x^2-\frac{1}{12}\pi x^3+\frac{x^4}{48}=\frac{\pi^4}{90}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}$$

令 $x=2\pi$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

再令 $x=2$ 得

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}-\left[\frac{\pi^2}{3}-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}\right]=\frac{\pi^4}{90}-\frac{(\pi-1)^2}{3}$$

整理即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{(\pi-1)^2}{6}$$

□

11. 解答: 原题条件等价于函数 f 是以 2π 为周期的连续函数, 不恒等于 0, 且对任何 a, $b,c\in\mathbb{R}$ 有

$$\int_a^{a+2\pi}f(x-b)\cos k(x-c)\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,\cdots,n$$

仅考虑 f 在长度大于 2π 的区间上仅改变有限次符号的情况. 应用反证法和数学归纳法, 由 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$ 及 $f\equiv 0$, 可知 f 一定会改变符号.

设 x_0 是 f 的一个变号零点且 f 在 x_0 的一个左邻域上非零, 这时可取得 $[x_0,x_0+2\pi]$ 上的一个分割:

$$x_0<x_1<\cdots<x_s=x_0+2\pi$$

使 f 在每个 x_i 的一个左邻域上非零, 在每个 $I_i=(x_{i-1},x_i)$ 上不变号, 不恒为零, 且在相邻的两个区间上异号, 同时当然有 $f(x_i)=0, i=1,2,\cdots,p$. 由 f 的连续性和周期性知 p 一定是偶数. 下面证明一定有

$$p\geqslant 2n+2 \tag{1}$$

当 $n=1$ 时, 若 $p=2$, 不妨设 f 在 I_1 上非负, 在 I_2 上非正, 令 $y_0=\dfrac{x_0+x_1}{2}$ 及

$$g(x)=\cos(x-y_0)-\cos(x_0-y_0)$$

则有 $g(x)$ 在 I_1 上恒正, 在 I_2 上恒负, 于是

$$0=\int_{x_0}^{x_0+2\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_0+2\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x>0$$

矛盾. 因此 $p>2$, 即 $p\geqslant 4$.

当 $n>1$ 时, 假设命题对小于 n 的情况都有 (1) 式成立. 令 $y_0=\dfrac{x_0+x_1}{2}$ 及

$$f_1(x)=f(x)[\cos(x-y_0)-\cos(x_0-y_0)]$$

则有 f_1 在 (x_0,x_2) 及 $I_2,I_3,\cdots,I_p$ 上都不变号, 不恒为零, 且在相邻的两个区间上异号.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

应用题目条件, 对任何 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 有

$$\int_a^{a+2\pi} f_1(x)\cos k(x-c)\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

因此对 f_1, 由归纳假设, 对应地有 $p_1=p-2\geqslant 2n$, 即 $p\geqslant 2n+2$. □

12. 解答:

证法一: 不妨设 $f(x)$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ 收敛. 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时有

$$\left|\int_N^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

再对 $\int_0^N f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ 用 Riemann 引理可知

$$\left|\int_0^N f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_0^N f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|+\left|\int_N^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

证法二: 利用广义积分中值第二定理有

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|=|f(0)|\left|\int_0^{\xi}\sin nx\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2|f(0)|}{n}\to 0$$

证法三: 参见第十二章第一组参考提第 10 题的解答. □

13. 解答: 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n}\sin nx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$$

可知 $f(x)$ 的部分和序列 (也即 $f(x)$ 的傅里叶级数) 一致收敛于 $f(x)$, 因而 $f(x)$ 连续, 从而平方可积, 成立 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{e^{2n}}>\frac{1}{e^2}$$

设 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\{|f(x)|\}$, 则有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{e^2}\Rightarrow M>\sqrt{\frac{1}{2e^2}}>\frac{2}{\pi e}$$

命题得证. □

14. 解答: 由于 $\varepsilon_n\to 0$, 因此

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$\exists n_1, \varepsilon_{n_1} < 1$, 取 $b_{n_1} = \varepsilon_{n_1} + 1$

$\exists n_2, \varepsilon_{n_2} < \dfrac{1}{2^2}$, 取 $b_{n_2} = \varepsilon_{n_2} + \dfrac{1}{2^2}$

$\vdots$

$\exists n_k, \varepsilon_{n_k} < \dfrac{1}{k^2}$, 取 $b_{n_k} = \varepsilon_{n_k} + \dfrac{1}{k^2}$

$\vdots$

对于 $n \neq n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$, 都取 $b_n = 0$. 则 $b_{n_k} < \dfrac{2}{k^2}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n \sin nx| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_{n_k} \sin n_k x| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} < +\infty$$

知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 一致收敛于一个连续函数 $f(x)$. b_n 就是 $f(x)$ 的 Fourier 系数 (a_n 取 0) 且满足题目要求. □

15. 解答: 直接计算 f' 的 Fourier 系数

$$\begin{aligned}
a_0' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{d}x = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi} = c \\
a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}f(x) \\
&= \frac{f(\pi)(-1)^n - f(-\pi)(-1)^n}{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\
&= nb_n + (-1)^n c \\
b_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}f(x) \\
&= -\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = -na_n
\end{aligned}$$

又有

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n-1}[f(\pi) - f(-\pi)]}{n} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

由 Riemann 引理显然有

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} n b_n = c$$ □

16. 解答: 由逐项积分定理

$$\int_0^x \left[\varphi(t) - \frac{c}{2}\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t [(nb_n + (-1)^n c)\cos nt - na_n \sin nt]\mathrm{d}t$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{c}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \sin nx + a_n \cos nx + (-1)^n c\frac{\sin nx}{n}\right]$$

考虑 (下面用到第 5 题的结论)

$$\frac{c}{2}x = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi - x}{2}\right)c = \frac{\pi}{2}c - c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

代入可得

$$\begin{aligned}\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t &= \frac{\pi}{2}c + \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \sin nx + a_n \cos nx + c\left[(-1)^n - 1\right]\frac{\sin nx}{n}\right] \\ &= \frac{\pi}{2}c + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin nx + a_n \cos nx) - 2c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin nx + a_n \cos nx)\end{aligned}$$

记 $f(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin nx + a_n \cos nx)$ 是其和函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数 (当然也是处处收敛的) 且在 $\varphi(x)$ 的连续点上有 $f'(x) = \varphi(x)$. □

17. 解答: 易验证

$$c = (-1)^{n-1}n \cdot \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} = -1$$

且

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n n^2}{n^2 - 1} + (-1)^{n+1}\right]\cos nx = -\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 - 1}\cos nx$$

显然在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 必是其和函数的 Fourier 级数. 由上一题可知存在 $f(x)$

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n \sin nx}{n^2 - 1}$$

对于二阶常系数线性微分方程

$$f'' + f = -\sin x$$

对应特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 有两解 $r_1 = i, r_2 = -i$. 对应齐次线性微分方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

设特解

$$\widetilde{y} = x(A \cos x + B \sin x)$$

代入验证知

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\widetilde{y}=\frac{1}{2}x\cos x$$

于是原方程通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$$

令 $x=0$ 知 $C_1=f(0)=0$. 令 $x=\dfrac{\pi}{2}$, 得

$$C_2=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n^2-1}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)}{4k^2-4k}=\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{4k}-\frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)}\right]=\frac{1}{4}$$

因此

$$f(x)=\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$$ □

18. 解答: 假设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 能够构成完备正交系的基, 由线性代数的知识可知任意 $n+1$ 个函数是线性相关的, 但在可积和平方可积函数空间中是不可能的, 比如 $1,x,x^2,\cdots,x^{n+1}$ 显然线性无关. □

19. 解答:

(1) 考虑到

$$(\cos\theta)^{2n}=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^{k}e^{i2(n-k)\theta}=\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{k}\cos 2(n-k)\theta$$

有

$$\begin{aligned}V_n(x)&=\frac{(2n)!!}{2^{2n}\pi(2n-1)!!}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{n-k}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos k(t-x)\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\end{aligned}$$

其中 a_k,b_k 是 f 的 Fourier 系数, 于是 V_n 是 n 次三角多项式.

(2) 考虑到

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{t-x}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t=\frac{2\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

有

$$\begin{aligned}V_n(x)-f(x)&=\frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-f(x)]\left(\cos\frac{t-x}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t\\&=\frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+u)-f(x)]\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

由 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta\in(0,\pi)$, 使得对任何 $x',x''\in\mathbb{R}$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

且 $|x'-x''|<\delta$ 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 另设 $|f(x)|\leqslant 2M, x\in\mathbb{R}$, 于是有

$$\begin{aligned}|V_n(x)-f(x)| &= \left|\frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)[f(x+u)-f(x)]\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}u\right| \\ &\leqslant \frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!}\left[\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}u+4M\int_{\delta}^{\pi}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}u\right] \\ &< \varepsilon+\frac{2M(2n)!!}{\pi(2n-1)!!}\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n}\end{aligned}$$

而

$$\frac{2M(2n)!!}{\pi(2n-1)!!}\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n}\to 0(n\to\infty)$$

因此存在 N, 当 $n>N$ 时有

$$|V_n(x)-f(x)|<2\varepsilon,\forall x\in\mathbb{R}$$

即 $\{V_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. □

20. 解答: 当 $x=0$ 时结论平凡. 考虑当 $x\in(0,\pi]$ 时

$$\begin{aligned}S_n'(x) &= -\sin x-\sin 2x-\cdots-\sin nx \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}\right)=-\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n'(x)+S_{n+1}'(x) &= -\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\left(\sin\frac{nx}{2}+\sin\frac{n+2}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=-\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)x\cdot\cot\frac{x}{2}\leqslant 0\end{aligned}$$

即 $S_n(x)+S_{n+1}(x)$ 单调递减.

(1) 当 $n=2p+1$ 时

$$\begin{aligned}2S_{2p+1}(x)+\frac{\cos(2p+2)x}{2p+2} &= S_{2p+1}(x)+S_{2p+2}(x)\geqslant S_{2p+1}(\pi)+S_{2p+2}(\pi) \\ &= -2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2p+1}\right)+\frac{1}{2p+2}\end{aligned}$$

$$2S_{2p+1}\geqslant -2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2p+1}\right)+\frac{1-\cos(2p+2)x}{2p+2}\geqslant -2$$

因此有 $S_n(x)\geqslant -1$.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2) 当 $n=2p$ 时

$$\begin{aligned}2S_{2p}+\frac{\cos(2p+1)x}{2p+1}&=S_{2p}(x)+S_{2p+1}(x)\geqslant S_{2p}(\pi)+S_{2p+1}(\pi)\\&=-2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2p}\right)-\frac{1}{2p+1}\end{aligned}$$

$$2S_{2p}\geqslant -2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)+\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{2p+1}\right)+\left(\frac{1}{2p}-\frac{\cos(2p+1)x}{2p+1}\right)\geqslant -2$$

因此也有 $S_n(x)\geqslant -1$.

另外易知 $S_n(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内闭一致收敛于其和函数 $-\ln 2-\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$(例题 16.2.5), 而在 0 和 2π 处级数为正, 因此

$$\varliminf_{n\to\infty}\min_{0\leqslant x\leqslant\pi}S_n(x)=\min_{0\leqslant x\leqslant\pi}\left(-\ln 2-\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)=-\ln 2$$

注: 这里只讨论 $[0,\pi]$ 上的情形是因为 $S_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上为偶函数且在 $(-\infty,+\infty)$ 上呈周期变化. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第十六章 无穷级数的应用

§16.1.3 练习题 学员: d39

1. 解答: 对每个 n, 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛与 $|S_n(x)| \leqslant F(x)$ 知 $\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 再由 S_n 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛于 S 知 $\int_{-\infty}^{+\infty} S(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$, 使得

$$\left|\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{+\infty}\right) S_n(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \left|\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{+\infty}\right) S(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\exists N, \forall n > N$, 有

$$\left|\int_{-A}^{A} [S_n(x) - S(x)]\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-A}^{A} |S_n(x) - S(x)|\mathrm{d}x < 2A \cdot \frac{\varepsilon}{6A} = \frac{\varepsilon}{3}$$

于是当 $n > N$ 后就有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} [S_n(x) - S(x)]\mathrm{d}x\right| \leqslant &\left|\int_{-A}^{A} [S_n(x) - S(x)]\mathrm{d}x\right| + \left|\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{+\infty}\right) S_n(x)\mathrm{d}x\right| \\ &+ \left|\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{+\infty}\right) S(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x)\mathrm{d}x$$

命题得证. □

2. 解答: 记 $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, 由题设可知 S_n 内闭一致收敛于 S, 而对每个 n 和 $x > 0$

$$|e^{-x} S_n(x)| \leqslant S_n(x) \leqslant S(x)$$

显然 $S(x)$ 连续, 广义可积, 因此由上题的结论可知

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x} S(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} S_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{+\infty} e^{-x} x^k \mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma(k+1) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k k! = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!\end{aligned}$$

注: 更详细的解析可参看徐森林下册 P314 第 665 题. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

3. 解答:

(1)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-} -\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{x\to 1^-} -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

(2) 由练习题 10.4.6 第 7 题的结论可知

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\ln x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{8}$$

(3) 由练习题 10.4.6 第 7 题的结论可知

$$\int_0^1 \ln x\ln(1-x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\ln x\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}\ln x\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right] - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 2-\frac{\pi^2}{6}$$

(4)

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-e^{-x}}\mathrm{d}x \xlongequal{t=e^x} \int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t \xlongequal{x=1/t} \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x \xlongequal{(2)} \frac{\pi^2}{8}$$

注: 换序条件 (一致收敛或内闭一致收敛性) 都是容易验证的. □

4. 解答: 首先有

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x$$

由于 x^x 在 $[0,1]$ 上的最小值在 $x=e^{-1}$ 处取到, 故

$$\left|(-1)^n\frac{(x\ln x)^n}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{en!}$$

从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x\ln x)^n}{n!}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 可逐项积分. 利用练习题 10.4.6 第 7 题的结论则有

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n\frac{(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

注: 类似地我们还可以得到

$$\int_0^1 x^{tx}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-t)^{n-1}}{n^n}$$

等等结论. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

5. 解答: 令 $t=x^2/2$, 则

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[(2n)!!]^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t)^n}{[(2n)!!]^2}\mathrm{d}t$$

我们可以验证积分内幂级数的收敛半径为 $+\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{[(2n)!!]^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{(2^n n!)^2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^2}}\overset{\text{stirling}}{=\!=}0$$

因此可逐项积分, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t)^n}{[(2n)!!]^2}\mathrm{d}t&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}e^{-t}\frac{(2t)^n}{[(2n)!!]^2}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{[(2n)!!]^2}\Gamma(n+1)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2^n n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n!}=e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

得证. □

§16.2.3 练习题 学员: d39

1. 解答: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2B-A.$ □

2. 解答: 设 $P_0(x)=P_1(x)=e^x, P_{n+1}(x)=(xP_n(x))', n\geqslant 1$, 注意到

$$P_0(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$P_1(x)=P_0'(x)=0+1+\frac{2}{2!}x+\cdots+\frac{n}{n!}x^{n-1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}$$

$$P_2(x)=(xP_1(x))'=0+1+\frac{2^2}{2!}x+\cdots+\frac{n^2}{n!}x^{n-1}+\cdots+=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$P_m(x)=(P_{m-1}(x)e^x)'=0+1+\frac{2^m}{2!}x+\cdots+\frac{n^m}{n!}x^{n-1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^m}{n!}x^{n-1}$$

令 $x=1$ 可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}=\sum_{k=0}^{m}a_k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}=\sum_{k=0}^{m}a_kP_k(1)$$ □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

3. 解答: 类似上题可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)^3}{n!}=\left\{x\left[x(xe^{-x})'\right]'\right\}'\Big|_{x=1}=-e^{-1}$. □

4. 解答: 注意到

$$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}$$

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\arctan\dfrac{1}{2n-1}-\arctan\dfrac{1}{2n+1}\right]=\dfrac{\pi}{4}$;

(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{2}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\arctan\dfrac{1}{n-1}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right]=\dfrac{3}{4}\pi$. □

5. 解答: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{a^{2^n}+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{2^n}{a^{2^n}-1}-\dfrac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}\right]=\dfrac{1}{a-1}$. □

6. 解答: 考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]$$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[x^{4n}+x^{4n+2}\right]=\frac{1+x^2}{1+x^4}$$

$$S(x)=\int_0^x\frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\frac{\arctan(1+\sqrt{2}x)-\arctan(1-\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots=S(1)=\frac{\arctan(1+\sqrt{2})-\arctan(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$ □

7. 解答:

$$1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{8n-1}+\frac{1}{8n+1}\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-64n^2}$$

由练习题 15.2.7 知

$$x\cot x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-n^2\pi^2}$$

令 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 可得

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-64n^2}=\frac{\pi}{8}\cot\frac{\pi}{8}=\frac{1+\sqrt{2}}{8}\pi$$ □

8. 解答: 考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{3n}=\frac{1}{1+x^3}\Rightarrow S(x)=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

于是

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=S(1)=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$ □

9. 解答:

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k(k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k}-\frac{a_k}{k+1}\right)=\left(a_1-\frac{a_1}{2}\right)+\left(\frac{a_2}{2}-\frac{a_2}{3}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{a_{n-1}}{n}\right)+\left(\frac{a_n}{n}-\frac{a_n}{n+1}\right)\\&=a_1+\frac{1}{2}(a_2-a_1)+\frac{1}{3}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n}(a_n-a_{n-1})-\frac{a_n}{n+1}\\&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{a_n}{n+1}\end{aligned}$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\pi^2}{6}$. □

10. 解答: 考虑

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\frac{x^{4n+3}}{4n+3}-\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right)$$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{4n}+x^{4n+2}-x^{2n+1})=\frac{1}{1-x^4}+\frac{x^2}{1-x^4}-\frac{x}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\ln(1+x)$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}\right)=S(1)=\ln 2$$ □

11. 解答: 考虑

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{5n+1}-\frac{1}{5n-1}\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-25n^2}$$

由练习题 15.2.7 知

$$x\cot x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-n^2\pi^2}$$

令 $x=\dfrac{\pi}{5}$ 可得

$$\frac{\pi}{5}\cot\frac{\pi}{5}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-25n^2}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

因此

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{5n+1}-\frac{1}{5n-1}\right]=\frac{\pi}{5}\cot\frac{\pi}{5}$$ □

12. 解答: 我们观察到

$$f^{(6)}(x)=f(x), f^{(i)}(0)=0, i=0,1,2,4,5, f^{(3)}(0)=1$$

由常微分方程的知识可知

$$\begin{aligned}f(x)=&C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\\&+C_4e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_5e^{x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_6e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\end{aligned}$$

依次求导代入初值条件后得到

$$\begin{cases}C_1+C_2+C_4+C_6=0\\C_1-C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3-\frac{\sqrt{1}}{2}C_4+\frac{\sqrt{3}}{2}C_5+\frac{1}{2}C_6=0\\C_1+C_2-\frac{\sqrt{3}}{2}C_3-\frac{1}{2}C_4+\frac{\sqrt{3}}{2}C_5-\frac{1}{2}C_6=1\\C_1-C_2+C_4-C_6=0\\C_1+C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3-\frac{1}{2}C_4-\frac{\sqrt{3}}{2}C_5-\frac{1}{2}C_6=0\\C_1-C_2-\frac{\sqrt{3}}{2}C_3-\frac{1}{2}C_4-\frac{\sqrt{3}}{2}C_5+\frac{1}{2}C_6=0\end{cases}$$

解得

$$C_1=C_2=-C_4=-C_6=\frac{1}{6}, C_3=-C_5=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

因此

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{6}e^{-x}+\frac{\sqrt{3}}{6}e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\\&-\frac{1}{6}e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}e^{x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{1}{6}e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\end{aligned}$$

注: 事实上上面这种方法计算量颇大, 是通过数学软件计算得到的, 下面再提供两种解法. 其中第一种方法计算量也十分大, 需要数学软件, 第二种则是可手算的纯代数方法.

方法一: 我们观察到

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$f(x)=\frac{x^3}{3!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots,\quad f'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots$$
$$f''(x)=x+\frac{x^7}{7!}+\cdots,\quad f'''(x)=1+\frac{x^6}{6!}+\cdots$$
$$f''''(x)=\frac{x^5}{5!}+\frac{x^{11}}{11!}\cdots,\quad f'''''(x)=\frac{x^4}{4!}+\frac{x^{10}}{10!}\cdots$$

全部加到一起可知

$$f+f'+f''+f'''+f''''+f'''''=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots=e^x$$

令 $g=f+f'''$, 则

$$g+g'+g''=e^x$$

且

$$g(0)=f(0)+f'''(0)=1, g'(0)=f'(0)+f''''(0)=0, g''(0)=f''(0)+f'''''(0)=0$$

由常微分方程的知识可知

$$g(x)=C_1e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}+C_2e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{e^x}{3}$$

代入初值条件可得

$$\begin{cases}C_2+\dfrac{1}{3}=1\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}C_1-\dfrac{1}{2}C_2+\dfrac{1}{3}=0\end{cases}$$

解得 $C_1=0, C_2=\dfrac{2}{3}$. 因此

$$f+f'''=g=\frac{2}{3}e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{e^x}{3}$$

再进行下去计算量很大, 需要借助数学软件, 这里就不再展示了. 但是这种方法折射了出一类微分方程的解法, 其思想是将一个合数阶的微分方程分拆分成因子阶的微分方程来计算 $(6=3\times2)$

方法二: 我们记 ω 为 6 次单位根, 即 $\omega^6=1$, 则

$$f(x)=C_1e^x+C_2e^{\omega x}+C_3e^{\omega^2x}+C_4e^{\omega^3x}+C_5e^{\omega^4x}+C_6e^{\omega^5}x$$

这个式子经过 Euler 公式展开后会得到复系数, 这不是原方程的实系数解. 但是回顾高阶微分方程通解公式的计算方法, 我们只需要确定所有实系数 $C_i(i=1,2,3,4,5,6)$, 然

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

后改写基本解组就可以得到原微分方程的实系数解.

通过直接对 $f(x)$ 求导代入初值条件后我们可以得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 & \omega^{10} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} & \omega^{15} \\ 1 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} & \omega^{20} \\ 1 & \omega^5 & \omega^{10} & \omega^{15} & \omega^{20} & \omega^{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其系数矩阵的行列式是一个 6 阶 Vandermonder 行列式

$$V_6(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant 5}(\omega^j-\omega^i)$$

记 $\Delta_{3,j}(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)$ 是 $V_6(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)$ 将第三行和第 j 列划去后的行列式. 则由 Cramer 法则知, 将 $V_6(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)$ 的第 j 列换成 $(0,0,1,0,0,0)'$ 后的行列式 Laplace 展开后就是 $\Delta_{3,j}(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)$, 则

$$C_j = \frac{\Delta_{3,j}(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)}{V_6(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)}$$

利用朱尧辰《高等代数范例选解》P40 例 1.4.1 的结论可知

$$\Delta_{3,j}(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5) = \sigma_3(1,\cdots,\omega^{j-2},\omega^j,\cdots,\omega^5)V_5(1,\cdots,\omega^{j-2},\omega^j,\cdots,\omega^5)(-1)^{3+j}$$

(其中 $\sigma_3(1,\cdots,\omega^{j-2},\omega^j,\cdots,\omega^5)$ 表示 $1,\cdots,\omega^{j-2},\omega^j,\cdots,\omega^5$ 形成的初等对称多项式)

于是可约分得

$$C_1 = \frac{\sigma_3(\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)}{\prod\limits_{i=1}^{5}(\omega^i-1)}, C_2 = \frac{\sigma_3(1,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5)}{\prod\limits_{i=2}^{5}(\omega^i-\omega)(\omega-1)}, \cdots\cdots$$

代入 $\omega^i = e^{i\frac{k\pi}{3}}(k=0,1,2,3,4,5)$ 可计算得到

$$C_1 = C_2 = -C_4 = -C_6 = \frac{1}{6}, C_3 = -C_5 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

用 $e^{ax}\sin bx$ 和 $e^{ax}\cos bx$ 改写 $a\pm bi$ 对应的基本解组后就得到了与原先一致的结果. □

13. 解答: 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n} \xlongequal{def} f(x)$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\cdot x^{2n-1} \overset{\text{Wallis}}{=\!=} 4\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2}(x\cos t)^{2n-1}\mathrm{d}t \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\sum_{n=1}^{\infty}(x\cos t)^{2n-1}\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi/2}\frac{x\cos t}{1-(x\cos t)^2}\mathrm{d}t \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\frac{x\mathrm{d}\sin t}{x^2\sin^2 t - x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]^2 \qquad \square$$

14. 解答: 记 $a_n = \dfrac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, 则

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a_{n+1} = a_n\cdot\frac{x(1-x^n)}{1-x^{n+2}} \\ &\Rightarrow a_{n+1}(1-x^{n+2}) = a_n(1-x^{n+1}+x-1) \\ &\Rightarrow a_n = \frac{1}{1-x}[a_{n+1}(1-x^{n+2}) - a_n(1-x^{n+1})] \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}a_k = \frac{1}{1-x}[a_{n+1}(1-x^{n+2}) - a_1(1-x^2)] = \frac{x^2(1-x^n)}{1-x^{n+1}} \end{aligned}$$

因此当 $|x|<1$ 时, $f(x)=x^2$; 当 $|x|>1$ 时, $f(x)=x$. $\square$

15. 解答: 记级数通项为 $a_n(x)$, 部分和为 $S_n(x)$. 注意到

$$a_n(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_n+x)} - \frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right]$$

裂项可知

$$S_n(x) = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x}\left[\frac{a_1a_2}{a_2+x} - \frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right]$$

又注意到

$$0 < \frac{a_2a_3\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)} = \frac{1}{(1+x/a_2)\cdots(1+x/a_{n+1})} < \frac{1}{1+x\sum_{k=2}^{n}(1/a_k)} \to 0$$

因此

$$S(x) = \lim_{n\to\infty}S_n(x) = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{a_1a_2}{a_2+x} = \frac{a_1}{x} \qquad \square$$

16. 解答: 记 $a_n = \dfrac{x^{2^{n-1}}}{(x+1)\cdots(x^{2^{n-1}}+1)}$, 注意到

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$a_n = a_{n-1}x^{2^{n-2}} - a_n x^{2^{n-1}}$$

于是有

$$\sum_{k=1}^{n} a_n = a_1 + a_1 x - a_n x^{2^{n-1}} = \frac{x+x^2}{1+x} - \frac{x^{2^n}(x-1)}{x^{2^n}-1} \to x-(x-1) = 1 \qquad \square$$

§16.3.6　练习题　学员: d39

1. 解答: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $P(x)$ 对所有 $x \in [a,b]$ 成立 $|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 又多项式 P 显然在 $[a,b]$ 上一致连续, 因此存在 $\delta > 0, \forall |x' - x''| < \delta, x', x'' \in [a,b]$, 成立 $|P(x') - P(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$. 于是有

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - P(x')| + |P(x') - P(x'')| + |P(x'') - f(x'')| < \varepsilon$$

这说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 从而也有 $f(x) \in C[a,b]$.

注: 本题说明了 Weierstrass 多项式逼近定理的充要性. $\square$

2. 解答:

(1) 显然存在多项式 $P_1(x)$ 使得在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x) - P_1(x) > 0$. 设 $f(x) - P_1(x)$ 的最小值为 $a_1 > 0$, 由 Weierstrass 多项式逼近定理可取 $P_2(x)$ 使得对所有 $x \in [a,b]$ 成立.

$$|f(x) - (P_1(x) + P_2(x))| = |P_2(x) - (f(x) - P_1(x))| < \frac{a_1}{2}$$

此时 $P_2(x)$ 是非负的. 再设 $f(x) - (P_1(x) + P_2(x))$ 的最小值为 a_2, 令 $\delta_3 = \min\left\{\frac{a_1}{2^2}, a_2\right\}$, 则存在 $P_3(x)$ 使得对所有 $x \in [a,b]$ 成立

$$|f(x) - (P_1(x) + P_2(x) + P_3(x))| = |P_3(x) - [f(x) - (P_1(x) + P_1(x))]| < \delta_3$$

依此类推, 我们取 $\delta_n = \min\left\{\frac{a_1}{2^{n-1}}, a_{n-1}\right\}$, 则有

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} P_k(x) \right| < \delta_n \leqslant \frac{a_1}{2^{n-1}} \to 0 (n \to \infty)$$

此时除了 $P_1(x)$ 可能为负, 其他项皆非负, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

(2) 由第 (1) 问直接可以推出.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(3) 先指出题目叙述有误. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = C$, 若所有 $x \in [a,b], n \geqslant 1$ 都有 $|P_n(x)| \leqslant a_n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |P_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n = C$$

取 $f(x) = C+1$, 那么有

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} P(x) \right| \geqslant 1 \not\to 0$$

即不可能存在满足题设又一致收敛于 $f(x)$ 的多项式级数. 因此若要结论成立, 必然得存在 P_N 它不受 $|P_N| \leqslant a_N$ 的限制. 不妨假设就是 P_1(否则 P_N 前面的项都取 0).
假如某个 a_n 为 0, 则只能取 $P_n = 0$, 相当于跳过了这一项, 我们不妨假设恒有 $a_n > 0$.
由于数列 $\{a_n\}$ 给定, 取 $y_n = \dfrac{\min\{a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\}}{2} > 0$, 则有

$$y_{n+1} + y_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n+1}}{2} = a_{n+1}$$

由 Weierstrass 多项式逼近定理, 可取 P_1 使得 $|f - P_1| \leqslant y_1$. 再取 P_2 使得 $|P_2 - (f - P_1)| \leqslant y_2$, 则

$$|P_2| \leqslant |P_2 - (f - P_1)| + |f - P_1| \leqslant y_2 + y_1 \leqslant a_2$$

依次类推, 可取 P_n 使得 $\left| P_n - \left(f - \sum\limits_{i=1}^{n-1} P_i \right) \right| \leqslant y_n$, 而

$$\begin{aligned} |P_n| &\leqslant \left| P_n - \left(f - \sum_{i=1}^{n-1} P_i \right) \right| + \left| f - \sum_{i=1}^{n-1} P_i \right| \\ &= \left| P_n - \left(f - \sum_{i=1}^{n-1} P_i \right) \right| + \left| P_{n-1} - \left(f - \sum_{i=1}^{n-2} P_i \right) \right| \leqslant y_n + y_{n-1} \leqslant a_n \end{aligned}$$

可以看出 $\sum P_n$ 收敛且有

$$\left| f - \sum_{i=1}^{n-1} P_i \right| \leqslant a_n \to 0$$

即 $\sum P_n \rightrightarrows f$.

3. 解答: 任给 $\varepsilon > 0$, 由 f 可积可设 $|f(x)| \leqslant M$ 且存在划分

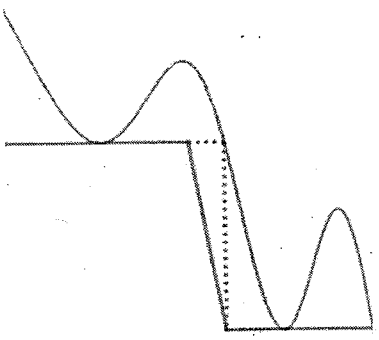
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

这里 $\Delta x_i=[x_{i-1},x_i]$, 并记 Δx_i 上的最大值和最小值为 M_i 和 m_i, 则振幅 $\omega_i=M_i-m_i$. 我们先取阶梯函数 p_1, 其在每段 Δx_i 上的取值为 m_i, 这样就有 $p_1\leqslant f$ 恒成立. 但还需要在分割点处做修改, 使得阶梯函数变为连续函数. 如下图所示, 在每个分割点 x_i 处将较低的一段函数往较高的一段函数挪动 $\dfrac{\varepsilon}{nM}$ 长度, 这样改造出来的连续函数我们记为 p_2, 并且显然有 $p_2\leqslant f$ 恒成立.



同理用 M_i 作出阶梯函数 P_1, 再挪动 $\dfrac{\varepsilon}{nM}$ 长度后得到连续函数 P_2 满足 $P_2\geqslant f$.

如此取出的 p_2 和 P_2 将满足 (考虑所有区间上多出来的上下 $2n$ 块小三角形的面积)

$$\int_a^b(P_2-p_2)=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}(P_2-p_2)=\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\Delta_x i+2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{nM}\cdot 2M<3\varepsilon$$

由 Weierstrass 多项式逼近定理的加强形式 (徐森林下册 P298 第 655 题) 知存在单调递增多项式序列 $\{p_n\}$ 一致收敛于 p_2 与单调递减多项式序列 $\{P_n\}$ 一致收敛于 P_2. 也就是说, 对上述给定的 ε, 存在 p 和 P 满足 $p\leqslant f\leqslant P$ 且 $|p-p_2|<\varepsilon,|P-P_2|<\varepsilon$, 从而有

$$\int_a^b(P-p)\leqslant\int_a^b|P-P'|+\int_a^b|P'-p'|+\int_a^b|p'-p|<[2(b-a)+3]\varepsilon$$

(单调性是为了保持 $p\leqslant f\leqslant P$ 的性质)

由 ε 的任意性, 命题得证. □

4. 解答: 由题设知, 对任一多项式 $g(x)$, 有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$. 根据 Weierstrass 多项式逼近定理, 可知对任给的 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $P(x)$ 使得 $|f(x)-P(x)|<\varepsilon,x\in[a,b]$. 故

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)P(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[f^2(x)-f(x)P(x)\right]\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b|f(x)||f(x)-P(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $f(x)\equiv 0,x\in[a,b]$.

若将 $n\geqslant 0$ 改作 $n\geqslant n_0$, 则

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\int_a^b (x^{n_0}f(x))^2\mathrm{d}x = \int_a^b [(x^{n_0}f(x))^2 - x^{2n_0}f(x)P(x)]\mathrm{d}x < \varepsilon\int_a^b |x^{2n_0}f(x)|\mathrm{d}x$$

这说明 $x^{n_0}f(x)\equiv 0$, 即 $f(x)\equiv 0$. □

5. 解答:

(1) 换元不难得到

$$\int_{-1}^1 x^{2n}f(-x)\mathrm{d}x = -\int_1^{-1} t^{2n}f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 t^{2n}f(t)\mathrm{d}t = 0$$

从而

$$\int_{-1}^1 x^{2n}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = 0$$

又因为 $x^{2n-1}[f(x)+f(-x)]$ 是奇函数, 因此

$$\int_{-1}^1 x^{2n-1}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = 0$$

这说明对所有 n 成立

$$\int_{-1}^1 x^{n}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = 0$$

由上一题结论知 $f(x) = -f(-x)$, 即 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 同 (1) 我们可得对所有 n 成立

$$\int_{-1}^1 x^{n}[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x = 0$$

因此 $f(x) = f(-x)$, 即 $f(x)$ 是偶函数. □

6. 解答:

必要性: 注意到 $P_n(x)$ 是奇次多项式, 故 $P_n(0) = 0$. 从而有 $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(0) = 0$.

充分性: 假定 $f(0) = 0$, 令 $f(x) = -f(-x), x\in[-1,0]$. 则 $f\in C[-1,1]$. 由 Weierstrass 多项式逼近定理知存在多项式列 $\{P_n(x)\}$ 使得 $P_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 现作多项式列

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)-P_n(-x)}{2}, x\in[-1,1]$$

则每个 $Q_n(x)$ 都是奇次多项式, 且有

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{P_n(x)-P_n(-x)}{2} = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$$

显然这是一致收敛的. □

7. 解答: 对任给的 $\varepsilon>0$, 由第十章第一组参考题第 5 题第 (3) 问可知存在 $g\in C[a,b]$ 使得 $\int_a^b |f-g| < \varepsilon$. 又由 Weierstrass 多项式逼近定理知存在多项式 p 使得 $|g-p|<\varepsilon$, 且因 f 可积从而有界, 如此我们有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\int_a^b f^2 = \int_a^b [f(f-g+g-p)+fp] = \int_a^b f(f-g+g-p)$$
$$\leqslant M\left[\int_a^b |f-g| + \int_a^b |g-p|\right] \leqslant 2M(b-a)\varepsilon$$

由 ε 的任意性知 $\int_a^b f^2 = 0$. 由练习题 10.2.4 第 1 题的注可知在连续点处 $f=0$. □

8. 解答: 多项式级数也是多项式序列, 第十四章第一组参考题第 10 题的直接推论.

注: 也可参看徐森林第三册 P168 例 14.3.3. □

§16.5.2　参考题　学员: d39

1. 解答:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots\right)$$
$$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1-\ln 2}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

(2) 考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n)(2n+1)} = \frac{3}{4}-\ln 2$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n-1)(3n)(3n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n-1}\right) + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

设

$$S(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n}}{3n}-\frac{x^{3n-1}}{3n-1}\right) + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n}}{3n}-\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right)$$

则有

$$S'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x^{3n-1}-x^{3n-2}) + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}(x^{3n-1}-x^{3n})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1-x^3}-\frac{x}{1-x^3}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{1-x^3}-\frac{x^3}{1-x^3}\right) = \frac{x^2-3x}{6x^2+6x+6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n-1)(3n)(3n+1)} = S(1) = \int_0^1 S'(x)\mathrm{d}x = \frac{9+\sqrt{3}\pi-9\ln 9}{54}$$ □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

2. 解答: 考虑

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k-1)}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln 2k}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln 2k}{2k}$$

而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln 2k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\ln 2}{k}+\frac{\ln k}{k}\right)\Rightarrow S_{2n}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\ln k}{k}-\ln 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

又

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\ln k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k+n)}{k+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+k/n)}{1+k/n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln n}{k+n}$$

所以

$$S_{2n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+k/n)}{1+k/n}+\ln n\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\ln 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

而我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+k/n)}{1+k/n}=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\ln^2 2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$$

由练习题 10.3.3 第 11 题知

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}-\ln 2\right)$$

极限存在. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_{2n}&=\frac{\ln^2 2}{2}+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln n}{n}\cdot n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}-\ln 2\right)+\ln 2\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right]\\&=\frac{\ln^2 2}{2}-\gamma\ln 2\end{aligned}$$

显然 S_n 收敛, 因此

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\frac{\ln^2 2}{2}-\gamma\ln 2$$

注: 也可参看《超越普里瓦洛夫》——数项级数卷第 38 题. □

3. 解答: 考虑

$$\frac{1}{m^2-n^2}=\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}\right),\qquad\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}\right)=-\frac{1}{m}-\frac{1}{2m}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{1}{m^2-n^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m}\left(-\frac{3}{2m}\right)=-\frac{3}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=-\frac{\pi^2}{8}$$ □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

4. 解答: 记 $S=\{x=a^b|a,b\in\mathbb{N},a\geqslant 2,b\geqslant 2\}$, 则

$$\sum_q\frac{1}{q-1}=\sum_{k\geqslant 2}\sum_{a\in\mathbb{N}\setminus S}\frac{1}{a^k-1}=\sum_{k\geqslant 2}\sum_{a\in\mathbb{N}\setminus S}\sum_{i\geqslant 1}a^{-ik}$$

由于 $\sum\limits_{a\in\mathbb{N}\setminus S}\sum\limits_{i\geqslant 1}a^i$ 遍历所有大于 1 的正整数, 故

$$\sum_q\frac{1}{q-1}=\sum_{k\geqslant 2}\sum_{n\geqslant 2}n^{-k}=\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n-1)}=1$$

注: 本题是 Goldbach-Euler 定理, Goldbach 起初的证明并不严谨. □

5. 解答: 由题设可知

$$a_n(a_n+a_{n-2})=a_{n-1}(a_{n+1}+a_{n-1})$$

$$a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}=a_{n-1}^2-a_{n-2}a_n=\cdots=a_2^2-a_1a_3=4$$

又注意到

$$\operatorname{arccot}\frac{a_{n+1}}{a_n}-\operatorname{arccot}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\operatorname{arccot}\frac{1+\dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}}{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}=\operatorname{arccot}a_n^2$$

所以有

$$\sum_{k=1}^n\operatorname{arccot}a_k^2=\operatorname{arccot}\frac{a_{n+1}}{a_n}-\operatorname{arccot}\frac{a_2}{a_1}+\operatorname{arccot}a_1^2=\operatorname{arccot}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

用特征根方程的方法易求数列通项, 且可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2+\sqrt{3}$$

故

$$\sum_{n=1}^\infty\operatorname{arccot}a_n^2=\operatorname{arccot}(2+\sqrt{3})=\frac{\pi}{12}$$

注: 这里省略了求通项的过程, 实际上, 对于形如 $a_{n+2}=pa_n+qa_{n+1}$ 的递推数列, 都会得到前后项之比的极限是该递推数列较大的一个特征根.($x^2=4x-1\Rightarrow x=2\pm\sqrt{3}$) □

6. 解答: 注意到

$$\frac{(n!)^2\cdot 2^{n+1}}{(2n+1)!}=\frac{(n!)^2\cdot 2^{n+1}}{(2n+1)!\cdot(2n)!!}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{\pi/2}(\cos x)^{2n+1}\mathrm{d}x$$

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{(n!)^2\cdot 2^{n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{\pi/2}(\cos x)^{2n+1}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}(2\cos x)\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right)^n\mathrm{d}x$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{4\cos x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x = 4\arctan(\sin x)\Big|_0^{\pi/2} = \pi$$

命题得证. □

7. 解答: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 由 Weierstrass 多项式逼近定理, 存在多项式 $P(x)$ 使得对所有 $x \in [0,1]$ 有 $|f(x)-P(x)| < \varepsilon$. 又由于 $\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x$ 极限存在, 故有界, 设 $\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x \leqslant M$. 于是有

$$\left|\int_0^1 f(x)g_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 P(x)g_n(x)\right| \leqslant \left|\int_0^1 |f(x)-P(x)|g_n(x)\mathrm{d}x\right| < M\varepsilon$$

另一方面, 由题设条件可知

$$\int_0^1 P(x)g_n(x)\mathrm{d}x$$

极限存在. 因此 $\int_0^1 f(x)g_n(x)\mathrm{d}x$ 的极限也存在, 并与上式极限相同. □

8. 解答: 由 Weierstrass 多项式逼近定理, 存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$. 现在设 $|f(x)| \leqslant M(a \leqslant x \leqslant b)$, 则由

$$|f(x)P_n(x) - f(x)g(x)| \leqslant M|P_n(x) - g(x)|$$

可知, 函数列 $\{f(x)P_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)g(x)$. 因为对任一幂函数 x^m, 易知 $f(x)x^m$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 (反复分部积分), 所以 $f(x)P_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数, 由练习题 14.2.4 第 8 题知 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也有原函数. □

9. 解答: 设 $F'(x) = f(x)$, 我们有

$$(F[g(x)])' = f[g(x)]g'(x) \Rightarrow f[g(x)] = \frac{(F[g(x)])'}{g'(x)}$$

由 $g'(x)$ 连续以及 $g'(x) > 0$ 可知 $1/g'(x)$ 连续.$(F[g(x)])'$ 有原函数 $F[g(x)]$, 由 $f[g(x)]$ 及 $g'(x)$ 有界可知 $(F[g(x)])'$ 有界, 由上题结论知 $f[g(x)]$ 有原函数. □

10. 解答: 由 $\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ 而 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛可知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上广义可积. 在 0 以外 $f(x)$ 都连续, 所以事实上只要验证 $f(x)$ 的变上限积分 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 满足 $F'(0) = 0$ 即可. 考虑当 $x \neq 0$ 时

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \cos\frac{1}{x}\cdot x^{3/2} - \frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{t}\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

易验证

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\cdot x^{1/2} - \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\int_0^x \sqrt{t}\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x} = 0$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有原函数, $g(x)$ 连续是显然的. 考虑

$$f\cdot g=\begin{cases}\sin^2\dfrac{1}{x}, 0<x\leqslant 1\\ 0,\ x=0\end{cases}$$

注意到

$$\sin^2\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)$$

由类似的办法可知 $\int_0^x\cos\dfrac{2}{t}\mathrm{d}t$ 在 0 处的导数为 0, 因此若 $\sin^2\dfrac{1}{x}$ 存在原函数 $H(x)$, 则将有 $H'(0)=\dfrac{1}{2}\neq f\cdot g(0)$, 矛盾. 所以 $f\cdot g$ 在 $[0,1]$ 上不存在原函数. □

11. 解答: 设多项式级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\rightrightarrows f, x\in(a,b)$, 显然 f 在 (a,b) 上连续. 由例题 14.1.3 知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x=a$ 处的右极限和在 $x=b$ 处的左极限存在, 又由例题 5.4.5 知 f 在 (a,b) 上一致连续. □

12. 解答: 作代换 $x=1/t$, 则 $f(x)=f(1/t)\xlongequal{def}\varphi(t), t\in(0,1]$. 补充定义 $\varphi(0)=A$, 则 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由 Weierstrass 多项式逼近定理, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在多项式 P 使得

$$|\varphi(t)-P(t)|<\varepsilon$$

即

$$\left|f(x)-P\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon$$

成立. □

13. 解答: 作代换 $t=e^{-x}$, 则 $f(x)=f(-\ln t)\xlongequal{def}\varphi(t), t\in(0,1]$. 补充定义 $\varphi(0)=A$, 则 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由 Weierstrass 多项式逼近定理, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在多项式 P 使得

$$|\varphi(t)-P(t)|<\varepsilon$$

即

$$\left|f(x)-P\left(e^{-x}\right)\right|<\varepsilon$$

成立. □

14. 解答: 任取 $x\in(0,1)$, 取得数列 $\{x_k\}$, 由题目要求, $\{x_k\}$ 不可能从某一项开始都是 9, 但可能某一项开始起都是 0.

若有 k_0 使 $x_{k_0}>0$, 且对任何 $i>k_0$, 有 $x_i=0$ 即 $x=\sum\limits_{i=1}^{k_0}\dfrac{x_i}{10^i}$, 对 $m>K$, 取

$$x'=x-\frac{1}{10^m}=\sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{x_i}{10^i}+\frac{x_{k_0}-1}{10^{k_0}}+\sum_{i=k_0+1}^{m}\frac{9}{10^i},\quad x''=x+\frac{1}{10^m}=\sum_{i=1}^{k_0}\frac{x_i}{10^i}+\frac{1}{10^m}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

且对 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{u_k}{2^k}$, 当 $u_{k_0}=1$, 有 $u_j=0, j>k_0$; $u_{k_0}=0$, 有 $u_j=1, j>k_0$ 的取值, 因此一定有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{u_i}{2^i}+\frac{1}{2^{k_0}}$$

另当 $v_{k_0}=1$ 时有 $v_j=0, k_0<j\leqslant m', v_{m'+1}=1$; 当 $v_{k_0}=0$ 时有 $v_j=1, k_0<j\leqslant m'$, $v_{m'+1}=0$.

(i) 对 $y=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{y_i}{10^i}\in(x',x)$, 有 $y_j=x_j, 1\leqslant j<k_0$, $y_{k_0}=x_{k_0}-1$, 同时存在 $m'\geqslant m$ 使 $y_j=9, k_0<j\leqslant m'$ 且 $y_{m'+1}<9$, 有

$$\frac{1}{10^{m'}}\leqslant\left|\frac{10-y_{m'}}{10^{m'}}-\sum_{i=m'+1}^{\infty}\frac{y_i}{10^i}\right|=|x-y|\leqslant\frac{1}{10^{m'-1}}$$

设 $f(y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{v_k}{2^k}$, 有 $u_j=v_j, 1\leqslant j<k_0$, 于是

$$f(y)=\sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{v_i}{2^i}+\frac{1}{2^{k_0}}+\frac{1}{2^{m'+1}}+\sum_{i=m'+2}^{\infty}\frac{v_i}{2^i}\ \text{或}\ \sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{v_i}{2^i}+\frac{1}{2^{k_0}}-\frac{1}{2^{m'}}+\sum_{i=m'+2}^{\infty}\frac{v_i}{2^i}$$

故

$$\frac{1}{2^{m'+1}}\leqslant|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{2^{m'}}+\frac{1}{2^{m'+1}}$$

同时

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\geqslant\frac{10^{m'-1}}{2^{m'+1}}$$

(ii) 对 $z=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{z_i}{10^i}\in(x,x'')$, 存在 $m''\geqslant m$ 使得 $z_j=x_j, 1\leqslant j\leqslant m''$, 且 $z_{m''+1}>0$, 于是有

$$\frac{1}{10^{m''+1}}<|x-z|<\frac{1}{10^{m''}}$$

设 $f(z)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{w_i}{2^i}$, 有 $u_j=w_j, 1\leqslant j\leqslant m''$, 且当 $w_{m''}=0$ 时有 $w_{m''+1}=1$; 当 $w_{m''}=1$ 时有 $w_{m''+1}=0$, 则

$$f(z)=\sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{w_i}{2^i}+\frac{1}{2^{k_0}}+\frac{1}{2^{m''+1}}+\sum_{i=m''+2}^{\infty}\frac{w_i}{2^i}\ \text{或}\ \sum_{i=1}^{k_0-1}\frac{w_i}{2^i}+\frac{1}{2^{k_0}}-\frac{1}{2^{m''}}+\sum_{i=m''+2}^{\infty}\frac{w_i}{2^i}$$

于是

$$\frac{1}{2^{m''+1}}\leqslant|f(x)-f(z)|\leqslant\frac{1}{2^{m''}}$$

同时

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{|f(x)-f(z)|}{|x-z|} \geqslant \frac{10^{m''+1}}{2^{m''+1}}$$

综上, 由连续和可微的定义, 可知 f 在 $(0,1)$ 中处处连续, 但处处不可微. □

15. 解答: 由题设可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 有优级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(1)$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$.

证明逆否命题:S 的连续点集 A 等于所有 u_n 连续点集 B 之交.

显然, 对任何 $x_0 \in B$, 所有 $u_n(x_0)$ 都连续, 由一致收敛性可知 S 在 $x=x_0$ 处连续, 即 $x_0 \in A$, $B \subset A$.

而对任何 $x_0 \in A$, $S(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0, \forall |x_0-x|<\delta$(不妨设 $x>x_0$), 有

$$S(x)-S(x_0)<\varepsilon$$

由单调性, 对每个 n 有

$$u_n(x)-u_n(x_0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(u_n(x)-u_n(x_0)) = S(x)-S(x_0)<\varepsilon$$

对 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 可推出另一边的不等式. 即

$$|u_n(x)-u_n(x_0)|<\varepsilon$$

故每个 $u_n(x)$ 都在 $x=x_0$ 处连续, 即 $x \in B, A \subset B$.

综上可知, S 的连续点集 A 等于所有 u_n 连续点集 B 之交. 原命题得证. □

16. 解答: 显然对任意的 $x<y, x, y \in (0,1)$ 有 $u_n(x) \leqslant u_n(y)$, 因此 $f(x) \leqslant f(y)$. 又根据 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的定义可知, f 在 $[0,1]$ 上单调. 另一方面, 易知 $u_n(x)$ 以 x_n 为间断点, 由上题结论可知 $f(x)$ 以所有 $[0,1]$ 上的有理数为间断点. □

17. 解答: 设 $x_0 \in (0,1)\backslash\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $(0,1)$ 中的无理数. 取正数 δ 使得 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (0,1)$. 考虑对 $\forall h \in (-\delta, \delta)$ 有

$$\frac{F(x_0+h)-F(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_0+h-r_n)-f(x_0-r_n)}{h2^n}$$

由例题 6.1.5 知

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & \text{当} x \neq 0 \\ 0, & \text{当} x = 0 \end{cases}$$

对每个 n, 显然 $f(x_0+h-r_n), f(x_0-r_n) \in (-3,3)$, 于是

$$\left|\frac{f(x_0+h-r_n)-f(x_0-r_n)}{h}\right| = |f'(\xi)| \leqslant 2\cdot 3+1 = 7$$

从而有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\left|\frac{f(x_0+h-r_n)-f(x_0-r_n)}{h2^n}\right| \leqslant \frac{7}{2^n}$$

可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f\left(x_0+h-r_n\right)-f\left(x_0-r_n\right)}{h2^n}$$

在 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (0,1)$ 上一致收敛. 故可知

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(x_0-r_n)}{2^n}$$

即

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(x-r_n)}{2^n}$$

当 $x=x_0$ 为 $(0,1)$ 中的有理数时, 则存在 l, $x_0=r_l$, 且有

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x-r_n)}{2^n}=\frac{f(x-r_l)}{2^l}+\sum_{n\neq l}\frac{f(x-r_n)}{2^n}$$

由于 $x=0$ 是 f' 的第二类间断点, 故 r_l 是 F' 的第二类间断点. 因此每个 r_n 是 F' 的第二类间断点, 而在其他点上连续. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第十七章　高维空间中的点集与基本定理

§17.1.3　思考题　学员: d39

1. 解答: 先证明 (i) 任意个开集的并是开集;(2) 有限个开集的交是开集.

(1) 设 $\{G_\alpha\}, \alpha \in I$ 是一族开集, 令 $G = \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$. 任取 $\boldsymbol{x} \in G$(若 $G = \varnothing$ 则不证自明), 则有某个 $\alpha_0 \in I$, 使 $\boldsymbol{x} \in G_{\alpha_0}$, 从而 $\boldsymbol{x}$ 是 G_{α_0} 的内点, 更是 G 的内点. 故 G 为开集.

(2) 设 $G_1, G_2, \cdots, G_p$ 是开集, 令 $G = \bigcap\limits_{k=1}^{p} G_k$. 任取 $\boldsymbol{x} \in G$, 则对每个 $k = 1, 2, \cdots, p$, 有 $\boldsymbol{x} \in G_k$. 于是有 $\boldsymbol{x}$ 邻域 (α_k, β_k) 使

$$\boldsymbol{x} \in (\alpha_k, \beta_k) \subset G_k, \quad k = 1, 2, \cdots, p$$

令 $(\alpha, \beta) = \bigcup\limits_{k=1}^{p} (\alpha_k, \beta_k)$, 那么它是 $\boldsymbol{x}$ 的非空邻域, 且整个含于 G 内, 故 $\boldsymbol{x}$ 为 G 的内点, 故 G 是开集.

往证本题: 设 $\{F_\alpha\}, \alpha \in I$ 是一族闭集, 则 $\{(F_\alpha)^c\}, \alpha \in I$ 是一族开集. 由命题 17.1.2 可以得到

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha (F_\alpha)^c, \quad \left(\bigcup_\alpha F_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha (F_\alpha)^c$$

由已证得得结论知 $\bigcup\limits_\alpha (F_\alpha)^c$ 是开集, 故 $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ 是闭集. 同理, 当 I 是有限指标集时可得 $\bigcup\limits_\alpha F_\alpha$ 是闭集. □

2. 解答: (2)⇒(1) 显然. 下证 (1) ⇒ (2): 设 $\boldsymbol{\xi}$ 为 S(定义 (1) 中) 的聚点, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \boldsymbol{x} \in O_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \cap S$. 取 $\varepsilon_1 = 1$, 则 $\exists \boldsymbol{x}_1 \in O_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{\xi}) \cap S$; 取 $\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}_1|\right\}$, 则 $\exists \boldsymbol{x}_2 \in O_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{\xi}) \cap S$, 显然 $\boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{x}_1$. 取 $\varepsilon_n = \min\left\{\frac{1}{n}, |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}_{n-1}|\right\}$, 则 $\exists \boldsymbol{x}_n \in O_{\varepsilon_n}(\boldsymbol{\xi}) \cap S$, 且 $\boldsymbol{x}_n$ 与 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ 互异的点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$, 且满足

$$|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}_n| < \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{n}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{\xi}$, 证毕. □

3. 解答: 不能通过. 因为可以取 δ' 充分小, 使得 $O_{\delta'}(\boldsymbol{x})$ 与 $O_{\delta - |x - x_0|}(\boldsymbol{x}_{n_0})$ 无交. 若要使用原始定义, 在取出 $\boldsymbol{x}$ 任意小的邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 后, 取 $\boldsymbol{x}_{n_0} \in O_\delta(\boldsymbol{x})$, 再使用 $\boldsymbol{x}_{n_0}$ 是聚点的定义即可通过. □

4. 解答: 令 $E_n = \left\{\left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 为开集族, 但 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = [-1, 1]$. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§17.1.4 练习题 学员: d39

1. 解答: 由定义可知 $\overline{S}=S\cup S^d$. 一方面, 设 $\boldsymbol{x}\in\partial S$. 若 $\boldsymbol{x}\in S^d$, 则 $\boldsymbol{x}\in S\cup S^d$. 若 $\boldsymbol{x}\notin S^d$, 则 $\exists O_\delta(\boldsymbol{x})\backslash\{\boldsymbol{x}\}$, 其中无 S 中的点. 又因为 $\boldsymbol{x}\in\partial S, O_\delta(\boldsymbol{x})\cap S=\varnothing$, 所以有 $\boldsymbol{x}\in S$, 从而 $\boldsymbol{x}\in S\cup S^d$, 即 $S\cup\partial S\subset S\cup S^d$. 另一方面, 设 $\boldsymbol{y}\in S^d$. 若 $\boldsymbol{x}\in S$, 则 $\boldsymbol{y}\in S\cup\partial S$. 若 $\boldsymbol{y}\notin S$, 则 $\boldsymbol{y}$ 的任一去心邻域内有 S 中的点, 也有 $\overline{S}$ 中的点, 故 $\boldsymbol{y}\in\partial S$, 从而 $\boldsymbol{y}\in S\cup\partial S$, 即 $S\cup S^d\subset S\cup\partial S$. 综上可知, $\overline{S}=S\cup S^d=S\cup\partial S$. □

2. 解答: 设 $\boldsymbol{y}\in\partial S$, 则 $\boldsymbol{y}\in\overline{S}$. 因为 $\boldsymbol{y}\notin\mathrm{int}S$, 所以 $\boldsymbol{y}\in\overline{S}-\mathrm{int}S$. 即 $\partial S\subset\overline{S}-\mathrm{int}S$. 又设 $\boldsymbol{x}\in\overline{S}-\mathrm{int}S$, 则 $\boldsymbol{x}$ 为外点或边界点. 因为 $\overline{S}$ 不含 S 的外点, 所以 $\boldsymbol{x}\in\partial S$. 即 $\overline{S}-\mathrm{int}S\subset\partial S$. 综上可知, $\partial S=\overline{S}-\mathrm{int}S$. □

3. 解答: 若 $\overline{A}\cap(\mathrm{int}B)\neq\varnothing$, 由第 1 题的结论, 且因 $A\cup(\mathrm{int}B)\subset A\cap B=\varnothing$, 故必有 $\partial A\cap(\mathrm{int}B)\neq\varnothing$. 设 $\boldsymbol{x}\in\partial A\cap(\mathrm{int}B)$, 则 $\exists O_\delta(\boldsymbol{x})\subset\mathrm{int}B$, 且 $O_\delta(\boldsymbol{x})$ 中有 A 中的点, 与 $A\cap B=\varnothing$ 矛盾. 故 $\overline{A}\cap(\mathrm{int}B)=\varnothing$. □

4. 解答: $\Rightarrow$: 因为 $(S^d)^d=S^d\subset S^d$, 故 S^d 是闭集, 从而 S 是闭集. 又因为 $S=S^d$ 中的点都为聚点, 所以 S 无孤立点. $\Leftarrow$: 由 S 闭可知 $S=\overline{S}=S\cup S^d$, 则有 $S^d\subset S$. 又因 S 无孤立点, 所以 $S\subset S^d$, 故 $S=S^d$. □

5. 解答: 考虑 $\overline{S}=S\cup S^d$. 如果 $\boldsymbol{x}\in S$, 则显然 $d(\boldsymbol{x},S)=0$. 如果 $\boldsymbol{x}\in S^d$, 则存在 $\{\boldsymbol{x}_n\}\to\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n\in S$, 从而 $d(\boldsymbol{x},S)=0$. 综上可知 $\overline{S}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|d(\boldsymbol{x},S)=0\}$. □

6. 解答: $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\overline{S}$, 设 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}(1-t), t\in[0,1]$. 因为 $\overline{S}$ 是闭集, 故可取 $\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n\in S$ 且 $\boldsymbol{a}_n\to\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_n\to\boldsymbol{b}(n\to\infty)$. 则因 S 是凸集, 故 $\boldsymbol{c}_n=\boldsymbol{a}_nt+\boldsymbol{b}_n(1-t)\in S$. 令 $n\to\infty$ 可知 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}(1-t)\in S^d\subset\overline{S}$.

注: 该命题反之不成立. 凸集还有下述性质:

(1) 凸集的交集是凸集;

(2) 凸集的并集不一定是凸集;

(3) 凸集的内点集是凸集, 逆命题不成立. □

7. 解答: 先设 $\boldsymbol{x}\in S\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$, 则 $\boldsymbol{x}\in S$ 且存在 $\alpha_0\in I$ 使 $\boldsymbol{x}\in A_{\alpha_0}$. 于是

$$\boldsymbol{x}\in S\cap A_{\alpha_0}\subset\bigcup_{\alpha\in I}(S\cap A_\alpha)$$

即有 $S\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}(S\cap A_\alpha)$.

反之, 设 $\boldsymbol{x}\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(S\cap A_\alpha)$, 则有 $\alpha_0\in I$ 使 $\boldsymbol{x}\in S\cap A_{\alpha_0}$, 此即 $\boldsymbol{x}\in S, \boldsymbol{x}\in A_{\alpha_0}$, 当然更有 $\boldsymbol{x}\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$, 因此 $\boldsymbol{x}\in S\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$. 即有 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}(S\cap A_\alpha)\subset S\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$. 故两集合相互包含, 命题得证. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

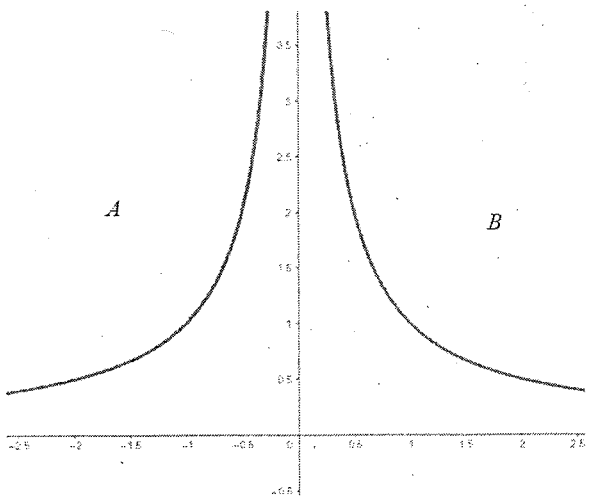
§17.2.3　练习题　学员: d39

1. 解答: 否则存在 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset A, \{\boldsymbol{y}_n\} \subset B$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n| = 0$. 不妨设 A 是有界的, 则 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 有收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\} \to \boldsymbol{x} \in A$. 这样就有

$$d(\boldsymbol{x}, B) = \lim_{k\to\infty} |\boldsymbol{x}_{n_k} - \boldsymbol{y}_{n_k}| = \lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n| = 0$$

而 B 是闭集, 故 $\boldsymbol{x} \in B$, 从而 $\boldsymbol{x} \in A \cap B$ 与 A 和 B 无交的条件矛盾. 故 $d(A, B) > 0$.

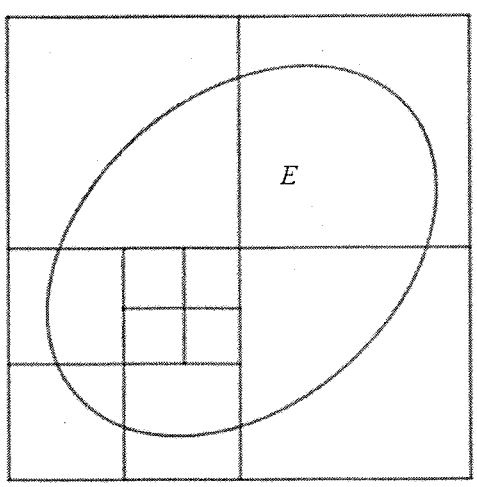
当 A, B 均是无界闭集时结论不一定, 例如取 $A = \{(x, y) : x > 0, y \geqslant 1/x\}, B = \{(x, y) : x < 0, y \leqslant -1/x\}$. 如图所示



显然 $d(A, B) = 0$. □

2. 解答: 由第 1 题的结论可知 $d(S_1, S_2) > 0$, 然后再用例题 17.2.4 的第二步即证. □

3. 解答: 设 E 为有界无限点集, 则存在一个闭矩形 $D_1 \supset E$.



如图所示, 把 D_1 分成四个相同的小正方形, 则在其中至少有一小闭正方形含有 E 中无

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

限多个点, 把它记为 D_2. 再对 D_2 用相同方法分成四个小正方形, 其中至少有一个小闭正方形含有 E 的无穷多个点. 如此进行下去, 得到一个闭正方形序列

$$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \cdots$$

显然 D_n 的边长趋于 0. 由闭矩形套定理可知存在唯一的一点 $M_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. 且对任给的 $\varepsilon > 0$, 可使 n 充分大后有 $D_n \subset O_\varepsilon(M_0)$. 由 D_n 的取法可知 $O_\varepsilon(M_0)$ 内有 E 的无限多个点, 故 M_0 是 E 的聚点. □

4. 解答:

$\Rightarrow$: 如果 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是收敛点列, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m > N$ 后有 $\boldsymbol{a}_n \subset O_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a}_m \subset O_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{a})$, 于是

$$d(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_m) \leqslant d(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}) + d(\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}) < \varepsilon$$

故 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是基本点列.

$\Leftarrow$: 如果 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是基本点列, 先证明其有界性. 不妨取 $\varepsilon_0 = 1$, 因 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是基本点列, 故存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时有 $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{N_0+1}) < 1$, 亦即 $\boldsymbol{x}_n \subset O_{\boldsymbol{x}_{N_0}+1}(\boldsymbol{0})$. 故 $\{x_n\}$ 有界. 由凝聚定理, $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 存在收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$, 设其极限点为 $\boldsymbol{\xi}$. 又由 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是基本点列, 任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n, m > N$ 后 $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_m) < \varepsilon/2$. 又 $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{\xi}$, 对上述的 ε, 存在 K, 当 $k > K$ 后有 $d(\boldsymbol{x}_{n_k}, \boldsymbol{\xi}) < \varepsilon/2$. 取 $N' = \max\{n_k + 1, N + 1\}$, 当 $n > N'$ 时, 取 $k_0 > K$ 使得 $n_{k_0} > N'$, 则有

$$d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\xi}) \leqslant d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n_{k_0}}) + d(\boldsymbol{x}_{n_{k_0}}, \boldsymbol{\xi}) < \varepsilon$$

这说明 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 收敛于 $\boldsymbol{\xi}$. □

5. 解答: 例题 17.2.3 已经给出答案. □

§17.3.2 参考题 学员: d39

第一组参考题 学员: d39

1. 解答: 设 F 是闭集. 令 $G_n = \{\boldsymbol{x} | d(\boldsymbol{x}, F) < 1/n\}$,$G_n$ 是开集: 任意 $\boldsymbol{x}_0 \in G_n, d(\boldsymbol{x}_0, F) < 1/n$, 所以存在 $\boldsymbol{y}_0 \in F$, 使 $d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \delta < 1/n$. 因为若不然, 任意 $\boldsymbol{y} \in F, d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \geqslant 1/n$ 则

$$d(\boldsymbol{x}_0, F) = \inf_{\boldsymbol{y} \in F} d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \geqslant \frac{1}{n}$$

矛盾.

令 $\varepsilon = 1/n - \delta > 0$, 任意 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon), d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) < \varepsilon$.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0)\leqslant d(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x})+d(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)<\varepsilon+\delta=\frac{1}{n}$$

于是 $d(\boldsymbol{x},F)=\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in F}d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0)<1/n$, 得 $\boldsymbol{x}\in G_n$. 则 $U(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon)\subset G_n$, 故 G_n 是开集. 设 $\boldsymbol{x}\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 对任意 n,$\boldsymbol{x}\in G_n$, $d(\boldsymbol{x},F)<1/n$. 令 $n\to\infty$, 得 $d(\boldsymbol{x},F)=0$. 由于 F 是闭集, 存在 $\boldsymbol{y}_n\in F$, 使 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_n)\to 0$, 得 $\boldsymbol{x}\in F'\subset F$, 即有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n\subset F$.

又显然 $G_n\supset F, n=1,2,\cdots$, 所以 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n\supset F$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n=F$, F 是可列个开集的交集.

若 G 是开集, 则 $\complement G$ 是闭集, 所以有开集 G_n, 使 $\complement G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 所以

$$G=\complement(\complement G)=\complement\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\complement G_n$$

而 $\complement G_n$ 是闭集, 因而 G 是可列个闭集的并集. □

2. 解答: 设 a,b,c 是 ΔABC 的三条中线. 取 ΔABC 三边的中点, 连接这些中点得到一个小三角形 Δ_1. 重复此流程, 可得到边长趋于 0 的三角形列 $\{\Delta_n\}$. 由闭集套定理, 存在唯一的一点 P 处于所有的三角形 Δ_n 中. 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 是三角形 Δ_n 的三条中线, 根据上述取法, 可见所有三角形 Δ_n 的中线实际上都重合于 ΔABC 的中线. 而对 $\forall\varepsilon>0$, 可以取半径小于 ε 的三角形 Δ_n, 其中有中线 a 上的点 A, 并且 $P\in\Delta_n$, 从而 $d(A,P)<\varepsilon$. 这说明 P 是 $\{a_n\}$ 的聚点. 由于线段列是闭集, 故 $P\in a$. 同理可知 $P\in b,c$. 故 ΔABC 的三条中线 a,b,c 交于一点 P. □

3. 解答: 设 $(x,y)\in E^d$, 则存在点列 $(x_n,f(x_n))\to(x,f(x))$. 因为 f 连续, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)=y$, 这说明 $(x,y)\in E$, 即 $E^d\subset E$, 故 E 是闭集. □

4. 解答: 设开集 $E\subset S$, 任取 $\boldsymbol{x}\in E$, 则存在球邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})\subset E\subset S$, 这表明 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的内点, 因此 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{int}S$, 所以 $E\subset\mathrm{int}S$. 即 $\mathrm{int}S$ 是包含于 S 的最大开集. □

注: 类似可证 $\overline{S}$ 是包含 S 的最小闭集.(史济怀上册定理 13.11)

5. 解答: 利用例题 17.2.4 的构造, 下证 O_1 和 O_2 都是开集. 设 $\boldsymbol{x}\in O_1$. 如果 $\boldsymbol{x}\in S_1$, 则 $O_{d_x/3}\subset O_1$, 从而 $\boldsymbol{x}$ 是 O_1 的内点; 如果 $\boldsymbol{x}\notin S_1$ 但 $\boldsymbol{x}\in O_{d_y/3}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}\in S_1$. 设 $d=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, 那么 $O_{d_y/3-d}(\boldsymbol{x})\subset O_{d_y/3}(\boldsymbol{y})\subset O_1$, 故 $\boldsymbol{x}$ 亦为 O_1 的内点. 综上可知 O_1 是开集, O_2 同理. □

注: 其他方法参见练习题 18.2.5 第 7 题.

6. 解答:

(1) 对任给的 $\delta>0$, 由于 S 有界, 故可用棱长为 a 的正方体包含 S. 把这个闭方体的棱长 M 等分, 切分成 M^n 个棱长为 a/M 的小正方体. 这里 M 要足够大使得每个小正方体的对角线长小于 δ. 可以找出所有包含 x 的点的正方体, 这些正方体覆盖住了 S. 再在每个小正方体中取一个 S 中的点为中心, 作半径为 δ 的开球, 则小正方体含于该开球. 可见 S 被这些以 S 中的点为中心, 半径为 δ 的有限个开球所覆盖.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2) 可由 (3) 得到, 这里提供不一样的方法:
如果 $F \in \{G_\alpha\}$, 则结论是平凡的. 如果 $F \notin \{G_\alpha\}$, 令

$$\delta(\{G_\alpha\}, \boldsymbol{x}) = \sup_{G \in \{G_\alpha\}} \left(\inf_{\boldsymbol{y} \in F \setminus G} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right)$$

注意到 $\delta(\{G_\alpha\}, \boldsymbol{x})$ 是取值在 F 上的连续正值函数. 由于 F 是紧集, 故 $\delta(\{G_\alpha\}, \boldsymbol{x})$ 在 F 上可以取到最小值. 则

$$\delta(\{G_\alpha\}) = \min_{\boldsymbol{x} \in F} \{\delta(\{G_\alpha\}, \boldsymbol{x})\} > 0$$

注: 此 δ 又称开覆盖 $\{G_\alpha\}$ 的 Lebesgue 数. 这个方法适用于一般的紧度量空间 (F, d).
(3)$\Leftarrow$: $\forall \boldsymbol{q} \in F$, 存在某个下标 α_q 使得 $\boldsymbol{q} \in G_{\alpha_q}$. 因 G_{α_q} 是开集, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $O_\varepsilon(\boldsymbol{q}) \subset G_{\alpha_q}$. 考虑半径缩小一半的开球族 $\left\{O_{\varepsilon_q/2}(\boldsymbol{q}) : \boldsymbol{q} \in F\right\}$, 它构成 F 的开覆盖. 由 F 是紧集, 则该覆盖存在有限子覆盖 $\left\{O_{\varepsilon_{q_i}/2}(\boldsymbol{q}_i) : i = 1, \cdots, n\right\}$. 令 δ 为这有限个 $\varepsilon_{q_i}/2$ 中最小者. 任意 $\boldsymbol{p} \in F$, 存在某个 $\boldsymbol{q}_i$ 到 $\boldsymbol{p}$ 的距离小于 $\varepsilon_{\boldsymbol{q}_i}/2$, 于是

$$O_\delta(\boldsymbol{p}) \subset O_{\varepsilon_{q_i/2}}(\boldsymbol{p}) \subset O_{\varepsilon_{\boldsymbol{q}_i}}(\boldsymbol{q}_i) \subset G_{\alpha_{q_i}}$$

$\Rightarrow$: 若 $\exists \delta > 0, \forall \boldsymbol{p} \in F, \exists G \in \{G_\alpha\}$, $O_\delta(\boldsymbol{p}) \subset G$, 因 F 有界, 由 (1) 可知可以用有限多个 $O_\delta(\boldsymbol{p_1}), O_\delta(\boldsymbol{p_2}), \cdots, O_\delta(\boldsymbol{p}_m)$ 包含住 F, 从而存在有限多个 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ 使得

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_\delta(\boldsymbol{p_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_i$$

命题得证. □

第二组参考题 学员: d39

1. 解答:
必要性: 若 $D = A \cup B$, 其中 A, B 是两个非空的不交开集. 由于 A 和 B 都是开集, 故 A 的每点都不是 B 的凝聚点且 B 的凝聚点都不是 A 的凝聚点, 即

$$A \cap B^d = A^d \cap B = \varnothing$$

因此 D 不连通, 矛盾.
充分性: 如果 D 不连通, 那么存在不相交的非空集 A 和 B 使得 $D = A \cup B$, 且 A 不含 B 的凝聚点, B 也不含 A 的凝聚点. 任取 $\boldsymbol{a} \in A$, 自然有 $\boldsymbol{a} \in D$. 由于 D 是开集, 存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $O_{\delta_1}(\boldsymbol{a}) \subset D$. 又因 $\boldsymbol{a}$ 不是 B 的凝聚点, 存在 $\delta_2 > 0$ 使得 $O_{\delta_2}(\boldsymbol{a})$ 中无 B 的点.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

两个球中较小的一个必然全在 A 中, 所以 A 是开集. 同理, B 是开集.

注: 这条性质对于一般的拓扑空间也是适用的. 事实上, 对于一般的拓扑空间 X, 下列各条等价, 证明参见张德学 P106 命题 3.26.

(i)X 连通;

(ii)X 不能写成两个非空的不交闭集的并;

(iii)X 的既开又闭集只有 $\varnothing$ 与 D;

(iv)X 到离散空间的连续映射是常值映射;

(v)X 到两个点的离散空间的连续映射是常值映射. □

2. 解答:

必要性: 任取不同的两点 $a,b\in D$, 不妨设 $a<b$, 如果能证明 $[a,b]\subset D$, 则 D 必然是区间. 假如有一点 $c\in(a,b)$, 但 $c\notin D$, 作集合

$$A=\{x\in D:x<c\},\quad B=\{x\in D:x>c\}$$

这时 A,B 都非空, 并且 $D=A\cup B$, 显然此时如果 A 中有凝聚点, 则必然 $\leqslant c$, 所以 B 中没有 A 的凝聚点, 同样 A 也没有 B 的凝聚点. 这说明 D 不是连通集, 产生矛盾.

充分性: 设 D 是数轴上的任一区间, 作分解 $D=A\cup B$, 其中 A,B 是两个不相交的非空集. 由于 A,B 非空, 可设存在 $a\in A,b\in B$. 不妨设 $a<b$, 于是 $[a,b]\subset D$, 用区间中点 $(a+b)/2$ 将这区间对分, 如果这中点属于 A, 那么取 $a_1=(a+b)/2,b_1=b$; 否则令 $a_1=a$, $b_1=(a+b)/2$. 按照作对分区间套的方法, 可作出闭区间套 $[a_k,b_k]$, 其中 $a_k\in A$, $b_k\in B$ $(k\in\mathbb{N}_+)$. 设这些区间的公共点为 c, 因此有 $a_k\to c$, $b_k\to c(k\to\infty)$. 显然, 如果 $c\in A$, 那么 $c\notin B$, 从而 $c\in B^d$, 这表明 $A\cap B^d=\varnothing$. 类似地, 当 $c\in B$ 时, $A^d\cap B\neq\varnothing$, 所以 D 是连通的.

注: 其他方法可参看张德学 P107 推论 3.11. □

3. 解答: 简便起见, 若 A 和 B 是不相交的非空子集且满足 $A^d\cap B=\varnothing,A\cap B^d=\varnothing$, 则称 A 和 B 是隔离的. 下面先证明几个引理:

引理 1(熊金城定理 4.1.3): 设 Y 是拓扑空间 X 的子集, 且 $A,B\subset Y$, 则 A 和 B 是 Y 中的隔离子集当且仅当它们是拓扑空间 X 中的隔离子集.

证: 集合 A 与 B 在 Y 中的闭包之交等于集合 A 和集合 B 在 X 中的闭包, 以及集合 Y 这三个集合之交, 也就等于集合 A 与集合 B 在 X 中的闭包之交; 同理, 集合 B 与集合 A 在 Y 中的闭包之交等于集合 B 与集合 A 在 X 中的闭包之交. 根据隔离子集的定义可见定理的第一个论断成立. 定理的第二个论断则根据第一个论断明显地推出.

引理 2(熊金城定理 4.1.4): 若 Y 是拓扑空间 X 中的连通子集, 存在 X 中不相交的非空子集 A 和 B, 它们互相不包含另一方的凝聚点, 且 $Y\subset A\cup B$, 则或者 $Y\subset A$, 或者 $Y\subset B$.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

证: 由题设知

$$\begin{aligned}&((A\cap Y)\cap\overline{B\cap Y})\cup((B\cap Y)\cap\overline{A\cap Y})\\ \subset&(A\cap Y\cap\overline{B})\cup(B\cap Y\cap\overline{A})\\ =&Y\cap((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}))=\varnothing\end{aligned}$$

这说明 $A\cap Y$ 和 $B\cup Y$ 是不交的非空子集且互相不包含另一方的凝聚点. 然而

$$(A\cap Y)\cup(B\cap Y)=(A\cup B)\cap Y=Y$$

由引理 1, 集合 $A\cap Y$ 和 $B\cap Y$ 中必有一个是空集. 如果 $A\cap Y=\varnothing$, 据上式可知 $Y\subset B$. 如果 $B\cap Y=\varnothing$, 则同理可知 $Y\subset A$.

往证本题: 设 S_1 和 S_2 是相交连通集, 且 $S_1\cup S_2=A\cup B$, 其中 A 和 B 是不相交的非空子集满足 $A^d\cap B=\varnothing, A\cap B^d=\varnothing$. 任取 $\boldsymbol{x}\in S_1\cap S_2$, 不失一般性, 设 $\boldsymbol{x}\in A$. 因为 S_1 连通, 由引理 2 知 $S_1\subset A$ 或 $S_1\subset B$. 而因为 $\boldsymbol{x}\in S_1\cap A$, 所以 $S_1\subset A$. 同理知 $S_2\subset A$, 于是 $S_1\cup S_2\subset A$, 这说明 $B=\varnothing$. 由引理 1 知 $S_1\cup S_2$ 是连通的.
注: 也有简洁证明, 需利用第 1 题注中提及的连通性等价定义 (v), 参见张德学 P108 引理 3.6. □

4. 解答: 先给出两个引理, 其证明过程可参阅熊金城 4.1 节.

引理 1(熊金城定理 4.1.7): 设 Y 是拓扑空间 X 的一个子集. 如果对于任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in Y$ 存在 X 中的一个连通子集 $Y_{\boldsymbol{xy}}$ 使得 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in Y_{\boldsymbol{xy}}\subset Y$, 则 Y 是 X 中的一个连通子集.
证: 如果 $Y=\varnothing$, 显然 Y 连通. 下设 $Y\neq\varnothing$. 任意选取 $\boldsymbol{a}\in Y$, 容易验证 $Y=\bigcup\limits_{\boldsymbol{y}\in Y}Y_{\boldsymbol{ay}}$. 由上一题的结论可知 Y 是连通的.

引理 2(熊金城定理 4.1.6): 设 $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是拓扑空间 X 的连通子集构成的一个子集族. 如果 $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\neq\varnothing$, 则 $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\neq\varnothing$ 是 X 的一个连通子集.

现证本题: 由题设 $\mathbb{R}^2$ 中所有至少有一个坐标是有理数的点构成的集合为 $A=(\mathbb{Q}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\mathbb{Q})$. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in A,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)\in A$, 其中 x_1,y_2 是有理数. 由于 $\{x_1\}\times\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}\times\{y_1\}$ 均连通, 由引理 2 知 $\{\{x_1\}\times\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R}\times\{y_2\}\}$ 连通. 若 y_2 不是有理数, 则 y_1 是有理数, 此时 $\{\{x_1\}\times\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R}\times\{0\}\}\cup\{\{y_1\}\times\mathbb{R}\}$ 是连通的. 因此, 有 A 的连通子集 $A_{\boldsymbol{xy}}$ 满足 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A_{\boldsymbol{xy}}\subset A$. 由引理 1 知 A 是连通的.
不难看出 A 集合也是道路连通的. 事实上, 对于任意两点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)(不失一般性可假设 $x_1,y_2\in\mathbb{Q}$), 可以构造一条连接这两点的道路: (i) 先从 (x_1,y_1) 出发沿着集合 $\{(x_1,y):y\in\mathbb{R}\}$ 走到 $(x_1,0)$ 处; (ii) 从 $(x_1,0)$ 沿着 x 轴走到原点; (iii) 从原点沿着 y 轴走到 $(0,y_2)$; (iv) 从 $(0,y_2)$ 沿着 $\{(x,y_2):x\in\mathbb{R}\}$ 走到点 (x_2,y_2). □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

. 5. 解答: 考虑

$$S=\{(0,0)\}\cup\{(x,\sin(1/x))|x\in(0,1]\}$$

由于 $Y=\{(x,\sin(1/x))|x\in(0,1]\}$ 同胚于 $(0,1]$, 故 Y 连通. 又因为

$$Y\subseteq S\subseteq\overline{Y}=Y\cup(\{0\}\times[-1,1])$$

所以 S 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通子集.

但 S 不是道路连通集, 为此我们说明 S 中不存在从 $(1,\sin 1)$ 到 $(0,0)$ 的道路即可. 下面用反证法证明比这略强一些的结论, 即 S 的闭包 $\overline{S}=S\cup(\{0\}\times[-1,1])$ 里面也不存在从 $(1,\sin 1)$ 到 $(0,0)$ 的道路. 假设 $\alpha:[0,1]\to\overline{S}$ 连续并且 $\alpha(0)=(1,\sin 1),\alpha(1)=(0,0)$. 由于 $\alpha^{\leftarrow}(\{0\}\times[-1,1])$ 是 $[0,1]$ 的非空闭子集, 因此有最小元, 设为 a. 由 a 的定义, 任给 $t\in[0,a),\alpha(t)\in Y$. 把 α 的定义域限制在 $[0,a]$ 上得到一连续映射 $\gamma=\alpha|[0,a]:[0,a]\longrightarrow\overline{S}$. 由 $[0,a]$ 的连通性不难验证 $\gamma^{\rightarrow}([0,a])=Y\cup\{\alpha(a)\}$, 因此 $Y\cup\{\alpha(a)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的紧子集, 从而是闭子集, 与 $\overline{Y\cup\{\alpha(a)\}}=Y\cup(\{0\}\times[-1,1])$ 矛盾.

注: 这个例子中的集合 S 又叫作拓扑学家的正弦曲线. □

6. 解答:

(1) 设 $\boldsymbol{a}\in(K+C)^d$, 则存在 $\boldsymbol{k_n}\in K,\boldsymbol{c_n}\in C$ 使得 $\boldsymbol{k_n}+\boldsymbol{c_n}\to\boldsymbol{a}$. 由于 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 即有界闭集, 故存在子列 $\{\boldsymbol{k}_{n_j}\}\to\boldsymbol{k_0}\in K$. 则对应的 $\{\boldsymbol{c}_{n_j}\}$ 极限也存在, 且 C 为闭集故 $\{\boldsymbol{c}_{n_j}\}\to\boldsymbol{c_0}\in C$. 这说明 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k_0}+\boldsymbol{c_0}\in K+C$. 故 $(K+C)^d\subset K+C$, $K+C$ 是闭集.

(2) 由第三章第二组参考题第九题的结论知 $\{\alpha m\}$ 的小数部分在 $[0,1]$ 上稠密. 即 $\forall x\in[0,1]$, 存在 $\{\alpha m_k\}\to x(k\to\infty)$. 而任何一个实数可以拆分成整数加小数, 故存在 $k\in K,c_n\in C$ 使得 $k+c_n\to x$. 即 $\overline{K+C}=\mathbb{R}$. 但是显然 $K+C=\mathbb{Z}\cup(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\neq\mathbb{R}$. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第十八章 多元函数的极限与连续

§18.1.4 思考题 学员: d39

1. 解答:

必要性: 既然极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, 因此 $\forall\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 使得当 $x\in O_\delta(a)\backslash\{a\}$ 使成立 $f(x)\in O_\varepsilon(A)$. 如果点列 $\{x_n\}$ 满足定理条件. 则对上述 $\delta>0$. 存在 N, 当 $n>N$ 时. 成立 $x_n\in O_\delta(\boldsymbol{a})\backslash\{\boldsymbol{a}\}$, 因此也就有 $f(x_n)\in O_\varepsilon(A)$.

充分性: 这时对每个点列 $\{x_n\}$, 只要它满足条件 $\{x_n\}\neq \boldsymbol{a}, \forall n\in\mathbb{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\boldsymbol{a}$, 点列 $\{f(x_n)\}$ 就一定收敛于 A. 用反证法: 如果结论 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 不真, 则由对偶法则知存在 $\varepsilon_0>0$, 对于每一个 $\delta>0$, 存在 x 同时满足条件 $x\in O_\delta(\boldsymbol{a})\backslash\{\boldsymbol{a}\}$ 和 $f(x)\in(O_{\varepsilon_0}(A))^c$. 取 $\delta_n=1/n$, 将上述 x 记为 x_n, 并对于每一个 $n\in\mathbb{N}_+$ 都这样做, 就得到点列 $\{x_n\}$, 它满足条件

$$x_n\in O_{1/n}(\boldsymbol{a})\backslash\{\boldsymbol{a}\},\quad f(x_n)\subset(O_{\varepsilon_0}(A))^c$$

容易看出这个点列 $\{x_n\}$ 满足定理中对它的全部要求, 且数列 $\{f(x_n)\}$ 不会收敛于 A, 与定理的条件矛盾. □

2. 解答:

必要性: 由函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 有极限知, 存在 A, 使 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. 因此, 对于每个给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in O_\delta\boldsymbol{a}\backslash\{\boldsymbol{a}\}$, 成立 $f(x)\in O_{\varepsilon/2}(A)$. 于是当 $x_1,x_2\in O_\delta\backslash\{\boldsymbol{a}\}$ 时就有

$$d(f(x_1),f(x_2))\leqslant d(f(x_1),A)+d(A,f(x_2))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

充分性: 由 Heine 归结原理, 只要证明, 凡满足要求 $x_n\neq\boldsymbol{a},\forall n\in\mathbb{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\boldsymbol{a}$ 的点列 $\{x_n\}$, 它对应的 $\{f(x_n)\}$ 必定收敛.

对给定的 $\varepsilon>0$, 根据命题的条件, 有 $\delta>0$, 当 $x',x''\in O_\delta(\boldsymbol{a})\backslash\{\boldsymbol{a}\}$ 时, 成立

$$d(f(x'),f(x''))<\varepsilon$$

由于 $x_n\neq\boldsymbol{a},\forall n\in\mathbb{N}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\boldsymbol{a}$, 所以对上述 $\delta>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时成立 $x_n\in O_\delta(\boldsymbol{a})$. 因此当 $n,m>N$ 时, 就有 $x_n,x_m\in O_\delta(\boldsymbol{a})\backslash\{\boldsymbol{a}\}$, 并成立

$$d(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$$

这就说明点列 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列. 由点列的 Cauchy 收敛准则可见 $\{f(x_n)\}$ 收敛. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§18.1.6　练习题　学员: d39

1. 解答:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin xy}{xy} \cdot y = a$;

(2) 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0^+} (r\cos\theta + r\sin\theta)\ln r^2$$

因为

$$|r\cos\theta + r\sin\theta||\ln r^2| \leqslant 4|r\ln r| \to 0(r\to 0)$$

故原极限为 0.

(3) 当 $x \neq 0$ 时

$$|f(x,y)| = \left|\frac{\ln(1+xy)}{x}\right| \leqslant |y|$$

而 $x = 0$ 时 $f(x,y) = y$, 故始终有

$$|f(x,y)| \leqslant |y| \to 0(y\to 0)$$

即原极限为 0.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,0)} \exp\left[\dfrac{x}{x+y}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right] = \exp[1\cdot e] = 1$;

(5) 注意到

$$x^2 - xy + y^2 \geqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$

故

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right| = 2|r\cos\theta + r\sin\theta| \leqslant 4|r| \to 0(r\to 0)$$

故原极限为 0. □

2. 解答: 当 (x,y) 沿着 $x^3+y^3 = x^4$ 趋于 $(0,0)$ 时有

$$f(x,y) = \frac{x^2(\sqrt[3]{x^4-x^3})^2}{x^4} = (\sqrt[3]{x-1})^2 \to 1(x\to 0)$$

但当 (x,y) 沿 $x=0$ 趋于 $(0,0)$ 时有 $f(x,y) = 0$. 故原极限不存在. □

3. 解答:

(1) 累次极限均为 0. 当 (x,y) 沿着 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时 $f(x,y) = 1$, 当 (x,y) 沿着 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 时 $f(x,y) = 0$, 故重极限不存在;

(2) 累次极限均不存在. 但

$$|f(x,y)| \leqslant |x| + |y| \to 0(x,y\to 0)$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故重极限为 0.

(3)$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$. 再取 $y=mx$ 有

$$f(x,y)=\frac{m}{1+m^2}+mx\sin\frac{1}{x}\to\frac{m}{1+m^2}(x\to 0)$$

故重极限不存在. □

4. 解答: 当 $x\neq y$ 时存在 ξ 介于 x 和 y 之间使得

$$g(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)$$

当 $(x,y)\to(t,t)$ 时有 $\xi\to t$, 故

$$\lim_{(x,y)\to(t,t)} g(x,y)=\lim_{\xi\to t} f'(\xi)=f'(t)$$ □

5. 解答:

唯一性定理: 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 存在, 则它只有一个极限.

证: 设 A,B 都是二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(a,b)$ 处的极限, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $(x,y)\in U^o(P_0;\delta)\cap D$ 时

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x,y)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$|A-B|\leqslant|f(x,y)-A|+|f(x,y)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 故 $A=B$.

局部有界性定理: 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$, 则存在点 $P_0(a,b)$ 的某空心邻域 $U^o(P_0;\delta)$, 使 $f(x,y)$ 在 $U^o(P_0;\delta)\cap D$ 上有界.

证: 设 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x)=A$, 则对 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta>0$, 对 $(x,y)\in U^o(P_0;\delta)\cap D$ 有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon=1$$

即

$$A-1<f(x,y)<A+1$$

局部保号性定理: 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A>0$(或 <0), 则对任意正数 $r(0<r<|A|)$, 存在 $P_0(a,b)$ 的某空心邻域 $U^o(P_0;\delta)$, 使得对一切点 $P(x,y)\in U^o(P_0;\delta)\cap D$, 恒有 $f(x,y)>r>0$(或 $f(x,y)<-r<0$).

证: 设 $A>0$, 取 $\varepsilon=A-r$, 由函数极限的定义可知: 存在相应的 $\delta>0$, 对一切 $(x,y)\in$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$U^o(P_0;\delta)\cap D$ 时

$$f(x,y)>A-(A-\varepsilon)=r>0$$

对于 $A<0$ 的情况可类似证明. □

6. 解答: 因为 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$, 从而对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得当 $|y-y_0|<\delta_1$ 时

$$|\varphi(y)-A|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\tag{1}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$, 从而对上述的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_2>0$ 使得当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时

$$|\psi(x)-0|<\frac{\varepsilon}{2}\tag{2}$$

由 (1)(2) 两式, 对任给的 $\varepsilon>0$, 只须取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $|x-x_1|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-A|&=|f(x,y)-\varphi(y)+\varphi(y)-A|\\&\leqslant|f(x,y)-\varphi(y)|+|\varphi(y)-A|\\&\leqslant|\psi(x)|+|\varphi(y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$. □

7. 解答: 累次极限存在且相同参见命题 18.1.2. 设累次极限为 A, 下证重极限也为 A.

由累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}h(y)=A$ 可知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$, 当 $0<|y-y_0|<\delta_1$ 时

$$|h(y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又由于 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=h(y)$ 是一致的, 故存在 $\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时对所有 $y\in U^o(y_0;\delta_1)$ 有

$$|f(x,y)-h(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

也就是对任意的 $(x,y)\in([x_0-\delta_2,x_0+\delta_2]\times[y_0-\delta_1,y_0+\delta_1])\backslash(\{x=x_0\}\cup\{y=y_0\})$ 有

$$|f(x,y)-A|<|f(x,y)-h(y)|+|h(y)-A|<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$. □

§18.2.5　练习题　学员: d39

1. 解答: 由于 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 连续, 故由 Cantor 定理 $f(x,y)$ 也是一致连续的. 即

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x'|<\delta$ 及 $|y-y'|<\delta$ 时有

$$|f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon$$

设 $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$. 则对上述的 δ, 存在 N, 当 $n>N$ 后对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|<\delta$$

故当 $n>N$ 后对所有 $x\in[a,b]$ 有

$$|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi(x))|<\varepsilon$$

即 $f(x,\varphi_n(x)) \rightrightarrows f(x,\varphi(x)), x\in[a,b]$. □

2. 解答: 注意到对任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, 有

$$\begin{aligned}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| &= \left|\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\right| \\ &\leqslant \frac{|x_1-x_2||x_1+x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+\frac{|y_1-y_2||y_1+y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \\ &\leqslant |x_1-x_2|\frac{|x_1|+|x_2|}{\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}}+|y_1-y_2|\frac{|y_1|+|y_2|}{\sqrt{y_1^2}+\sqrt{y_2^2}} \\ &\leqslant |x_1-x_2|+|y_1-y_2|\end{aligned}$$

因此 $\forall\varepsilon>0$, 当 $|x_1-x_2|<\dfrac{\varepsilon}{2},|y_1-y_2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 时就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$$

即 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续. □

3. 解答: 反证存在 $\boldsymbol{x}_0\in\overline{E}$, 使得 $f(\boldsymbol{x}_0)\notin\overline{f(E)}$, 那么自然有 $\boldsymbol{x}_0\notin E$(否则 $f(\boldsymbol{x}_0)\in f(E)\subset\overline{f(E)}$ 矛盾). 故 $\boldsymbol{x}_0\in E^d$, 从而存在 E 中的点列 $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0$. 由 f 连续可知 $f(\boldsymbol{x}_n)\to f(\boldsymbol{x}_0)$. 又 $\overline{f(E)}$ 是闭集, 故 $f(\boldsymbol{x}_0)\in\overline{f(E)}$, 矛盾. 命题得证. □

4. 解答: 答案是否定的. 由于对 $\mathbb{R}$ 中每个开集 V, 可以找到 $(a,b)\subset V$, 而 (a,b) 与 $(0,1)$ 之间显然存在双射, 故如果能设法构造一个将 $(0,1)$ 映射成 $\mathbb{R}$ 的非连续映射 f, 则 $f(V)\supset f((a,b))=\mathbb{R}$ 为开集, 就是反例. 下面来构造这个 f(需要抽象代数和集合论的知识): 定义 $x\sim y$, 如果 $x-y\in\mathbb{Q}$, 易证这是一个 $\mathbb{R}$ 上的等价关系. 对 $x\in\mathbb{R}$, $[x]=\{x+q|q\in\mathbb{Q}\}$ 是 x 的等价类, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 就是 $\{[x]|x\in\mathbb{R}\}$. 由于 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的正规子群, 根据 Lagrange 定理 (GTM73 定理 4.6)

$$|\mathbb{R}|=|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}||\mathbb{Q}|$$

如果故 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 可数, 则 $\mathbb{R}$ 可数, 矛盾. 因此 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 不可数, 从而必有 $|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}|>|\mathbb{Q}|$.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

我们有引理: 当 A, B 都是无限集时,$|A||B| = \max\{|A|, |B|\}$. 这很容易证明, 注意到

$$\max\{|A|, |B|\} \leqslant |A||B| \leqslant |\max\{|A|, |B|\}|^2 = |\max\{|A|, |B|\}|$$

(最有一个等号可参见张德学 P32 定理 1.9(3))
由引理可知

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}||\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}|$$

所以存在 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 间的双射 h, 最后令

$$f : (0,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto h([x])$$

则 f 将任何 $\mathbb{R}$ 中的开集映为 $\mathbb{R}$(开集), 但显然 f 不连续 ($\mathbb{R}$ 的原像可以是闭集).
注: (1)$\mathbb{R}$ 上的连续函数也未必是开映射, 例如常值函数将任意开集映成单点集 (闭集).
(2)$\mathbb{R}$ 中不连续的开映射是不能不依赖选择公理具体构造出来的.
(3) 介于本题严重超纲, 怀疑题目本意未限定拓扑为欧式拓扑, 则我们可以举

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in (0, +\infty) \\ 1, x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

它将每个开集映射为离散拓扑 $\{0,1\}$ 中的开集, 且显然不连续. □

5. 解答: 如果令 $r = \sqrt{x^2+y^2} > |x| + |y|$, 则由题设可知 $\lim\limits_{r\to+\infty} f(x,y)$ 存在, 设为 a.
由极限存在的定义, 取 $\varepsilon_0 = 1$, 则存在 $R_1 > 0$ 使得当 $r > R_1$ 时有

$$|f(x,y) - a| < 1, \quad a - 1 < f(x,y) < a + 1$$

于是当 $r > R_1$ 时有 $|f(x,y)| < \max\{|a-1|, |a+1|\}$. 又当 $r \leqslant R_1$ 时

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} \leqslant R_1\right\}$$

是紧集, 而 f 在 $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ 上连续, 故 f 可在 D_1 上取得最小值 m 最大值 M. 从而

$$r \leq R_1 \text{时 } |f(x,y)| \leqslant \max\{|a-1|, |a+1|, |M|, |m|\}$$

即 f 有界. 又由极限定义, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $R_2 > 0$, 当 $r > R_2$ 时 $|f(x,y) - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 即

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < f(x,y) < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

于是对 $\forall (x', y'), (x'', y'')$ 满足 $\sqrt{x'^2+y'^2} > R_2, \sqrt{x''^2+y''^2} > R_2$, 有

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \leqslant |f(x', y') - a| + |a - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

又因 f 在紧集 $D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R_1+1\right\}$ 上连续, 也一致连续. 对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 当 $(x',y'),(x'',y'')\in D$, 且 $d((x',y'),(x'',y''))<\delta_1$ 时有

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,1\}$. 则当 $d((x',y'),(x'',y''))<\delta$ 时要么都在 D_2 中, 要么都在 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\sqrt{x^2+y^2}>R_2\}$ 中, 故始终有

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon$$

即 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续.

注: 反之不成立. 即 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续不能推出 $\lim\limits_{r\to+\infty}f(x,y)$ 存在. □

6. 解答: 第 10 题的特例. □

7. 解答: 令

$$\rho(\boldsymbol{x})=\frac{d(\boldsymbol{x},S_1)}{d(\boldsymbol{x},S_1)+d(\boldsymbol{x},S_2)}$$

由例题 18.2.7 易知 $\rho(\boldsymbol{x})$ 连续. 对任意的 $\boldsymbol{x}\in S_1$ 可知 $\rho(\boldsymbol{x})=0$; 对任意的 $\boldsymbol{x}\in S_2$ 可知 $\rho(\boldsymbol{x})=1$. 令

$$O_1=f^{\leftarrow}[0,1/3),\quad O_2=f^{\leftarrow}(2/3,1]$$

由于 f 连续, 故 O_1,O_2 是包含 A,B 的不交非空开集.

注: (1) 这个方法可以用来证明度量空间正规.

(2)Urysohn 引理断言, 对任意正规空间, 存在连续映射 $f:X\longrightarrow[0,1]$ 使得 $f^{\rightarrow}(A)=\{0\},f^{\rightarrow}(B)=\{1\}$. 本题的构造只是一个特例. □

8. 解答: 由题设可知 $f_n(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x})=0,\boldsymbol{x}\in D$. 由于 D 是紧集, 故 $f_n(\boldsymbol{x})$ 在 D 上存在最大值 $f_n(\boldsymbol{x}_n)$. 则题设有

$$f_{n+1}(\boldsymbol{x}_{n+1})\leqslant f_n(\boldsymbol{x}_{n+1})\leqslant f_n(\boldsymbol{x}_n)$$

故 $\{f_n(\boldsymbol{x}_n)\}$ 关于 n 单调递减且非负, 从而必有极限. 设

$$\lim_{n\to\infty}f_n(\boldsymbol{x}_n)=a$$

即 $\{f_n(\boldsymbol{x}_n)\}$ 单调递减趋于 a, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\boldsymbol{x}\in D}|f_n(\boldsymbol{x})-a|=\lim_{n\to\infty}(f_n(\boldsymbol{x}_n)-a)=0$$

即 $f_n(\boldsymbol{x})\rightrightarrows a$. 但由题设 $f_n(\boldsymbol{x})$ 在 D 上点态收敛于 0, 故 $a=0$, 即 $f_n(\boldsymbol{x})\rightrightarrows 0,\boldsymbol{x}\in D$. □

9. 解答: 只要验证 $\omega_f(\boldsymbol{a})$ 满足例题 18.2.8 的两条性质即可.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(1) 固定点 $\boldsymbol{a}\in E$, 当 f 有界时, 显然 $\sup\limits_{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}|\leqslant\delta}\{|f(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{x})|\}$ 是关于 δ 的单调增加的有界函数, 故必然存在极限 $\omega_f(\boldsymbol{a})$.

(2) 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 点连续, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})$ 时, $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|<\varepsilon$, 此时有

$$\omega_f(\boldsymbol{a},\delta)\leqslant\varepsilon$$

于是

$$\omega_f(\boldsymbol{a})=\lim_{\delta\to0^+}\omega_f(\boldsymbol{a},\delta)=0$$

反之, 若 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega_f(\boldsymbol{a},\delta)=0$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0$, 当 $\delta\leqslant\delta_0$ 时

$$|f(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{x})|\leqslant\omega_f(\boldsymbol{a},\delta)=\sup_{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}|\leqslant\delta}\{|f(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{x})|\}<\varepsilon$$

即 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 处连续. □

10. 解答: 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $f:K\to\mathbb{R}^n$ 为连续映射. 设 $\{\boldsymbol{y}_k\}\subset f(K)$, 对每个 $\boldsymbol{y}_k$, 任取一个满足 $f(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{y}_k$ 的点 $\boldsymbol{x}_k\in K$, 则 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为紧集 K 的点列, 必存在子列满足

$$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_{k_i}=\boldsymbol{a}\in K$$

由 f 的连续性知

$$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{y}_{k_i}=\lim_{i\to\infty}f(\boldsymbol{x}_{k_i})=f(\boldsymbol{a})$$

即 $f(\boldsymbol{a})$ 是 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 的聚点, 且 $\boldsymbol{a}\in K$, 所以 $f(\boldsymbol{a})\in f(K)$. 因此 $f(K)$ 是紧集. □

§18.3.2　参考题　学员: d39

第一组参考题　学员: d39

1. 解答: 取 $y_n\nearrow d$, 由 Heine 归结定理, 只需证明 $f(x,y_n)\rightrightarrows f(x,d)$. 记 $F_n(x)=f(x,y_n)$, 则 $F_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 关于 n 单调增加, 且 $f(x,d)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 令 $g_n(x)=F(x)-F_n(x)$, 则 $g_n(x)$ 非负连续且单调递减趋于 0. 任给 $\varepsilon>0$, 我们要证明存在 N, 使得当 $n>N$ 时有

$$0\leqslant g_n(x)<\varepsilon,\quad\forall x\in[a,b]$$

即要证 n 充分大后 $A_n=\{x\in[a,b]|g_n(x)\geqslant\varepsilon\}=\varnothing$. 因为 g_n 关于 n 递减, 因此

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

为此我们只要证明某一个 A_n 是空集即可.

反证法: 假设 A_n 均非空集, 取 $x_n \in A_n$, 则 $\{x_n\}$ 为 $[a,b]$ 中的有界点列, 从而存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$, 设此子列收敛到 $x_0 \in [a,b]$. 则有

$$A_k \supset A_{n_k} \supset \{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \cdots\}$$

而 g_k 在 x_0 处连续, 我们有

$$g_k(x_0) = \lim_{k \leqslant i \to \infty} g_k(x_{n_i}) \geqslant \varepsilon$$

上式对任意 $k \geqslant 1$ 均成立, 这和 $g_n(x_0) \to 0 (n \to \infty)$ 相矛盾.

至此可知 $g_n(x) \rightrightarrows 0$, 从而命题成立.

注: 本题实际上是函数列形式 Dini 第一定理.Dini 定理有以下两种 (注意它们的区别):

第一 Dini 定理: 设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 是一有界闭区间, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是一连续函数, 若

(1) 函数列 $\{f_n\}$ 是单调的, 即 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leqslant f_{n+1}$ 或 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geqslant f_{n+1}$.

(2) 函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于一连续函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

则函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.(与 §14.1 中函数项级数形式 Dini 定理 (裴礼文 P504 例 5.2.27) 类似, 函数列形式 Dini 定理证明可以参阅邹应下册 P95 定理 12.1.5)

第二 Dini 定理: 设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 是一有界闭区间, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是一连续函数, 若

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ 在 $[a,b]$ 上单调.

(2) 函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于一连续函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

则函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.(证明参见第十四章第二组参考题第 3 题) □

2. 解答: 设 $\psi(\xi) = \max\limits_{a \leqslant y \leqslant \xi} f(\xi, y)$. 由题设知 $f(\xi, y)$ 是关于 ξ 的连续函数, 故对每个 $\xi_0 \in [y, x]$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|\xi - \xi_0| < \delta$ 时有

$$f(\xi_0, y) - \varepsilon < f(\xi, y) < f(\xi_0, y) + \varepsilon \tag{1}$$

此时考虑 $y = a + k(\xi - a), k \in [0,1]$, 则

$$\psi(\xi) = \max_{a \leqslant y \leqslant \xi} f(\xi, y) = \max_{0 \leqslant k \leqslant 1} f(\xi, a + k(\xi - a))$$

而 (1) 式化为

$$f(\xi_0, a + k(\xi_0 - a)) - \varepsilon < f(\xi, a + k(\xi - a)) < f(\xi_0, a + k(\xi_0 - a)) + \varepsilon \tag{2}$$

在 (2) 式右半边对 k 取 max, 则有

$$f(\xi_0, a + k(\xi_0 - a)) - \varepsilon < f(\xi, a + k(\xi - a)) < \psi(\xi_0) + \varepsilon \tag{3}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

在 (3) 式中间 k 取 max, 则有

$$f(\xi_0, a+k(\xi_0-a))-\varepsilon<\psi(\xi)<\psi(\xi_0)+\varepsilon \tag{4}$$

最后对 (4) 式左半边对 k 取 max, 则有

$$\psi(\xi_0)-\varepsilon<\psi(\xi)<\psi(\xi_0)+\varepsilon \tag{5}$$

(5) 式说明了 $\psi(\xi)$ 的连续性. 同理可证 $\varphi(x)=\max\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\psi(\xi)$ 的连续性. □

3. 解答:

必要性: 若 f 连续, 由练习题 18.2.5 第 10 题可知 $f(D)$ 是紧集. 记

$$E=\{(\boldsymbol{x},y)\in\mathbb{R}^{n+1}|y=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D\}$$

则必有 $E\subset D\times f(D)$, D 和 $f(D)$ 都是紧集, 故都有界, 从而 E 有界.

取 $(\boldsymbol{x},y)\in E^d$, 则存在点列 $(\boldsymbol{x}_n,f(\boldsymbol{x}_n))\to(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))$. 由 f 连续可得

$$\lim_{n\to\infty}f(\boldsymbol{x}_n)=f(\boldsymbol{x})=y$$

这说明 $(\boldsymbol{x},y)\in E$, 即 $E^d\subset E$, 故 E 是闭集. 结合 E 有界, 知 E 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧集.

充分性: 如果 E 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧集, 作映射

$$g:D\to E:\boldsymbol{x}\mapsto(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))$$

$$p:E\to D:(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))\mapsto\boldsymbol{x}$$

设 S 是 E 内的闭集, 则因为 E 是紧集所以 S 是紧集, 又映射 p 显然连续 (开集的原像是开集), 由练习题 18.2.5 第 10 题的结论可知 $p(S)$ 是紧集, 也是有界闭集, 因此 $g^{-1}(\mathcal{S})=p(\mathcal{S})$ 为闭集, 从而 g 连续 (闭集的原像是闭集), 则 f 也连续 (否则 g 不连续, 矛盾).

注: (1) 本题的背景是泛函分析中的闭图像定理.

(2) 也可用其他方法证明, 参见徐森林《实变函数习题精选》P80 第 90 题. □

4. 解答: 记

$$a_{ij}=\int_a^b f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x$$

必要性: 若 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 线性相关, 则存在不全为 0 的 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得

$$g(x)\equiv\sum_{i=1}^n c_if_i(x)\equiv0,x\in[0,1]$$

由此我们有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)f_j(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}c_i = 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{1}$$

即关于 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的方程组有非零解, 故系数矩阵的行列式

$$\det(a_{ij}) = 0 \tag{2}$$

充分性: 若 (2) 式成立, 则存在不全为 0 的 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得 (1) 式成立, 于是有

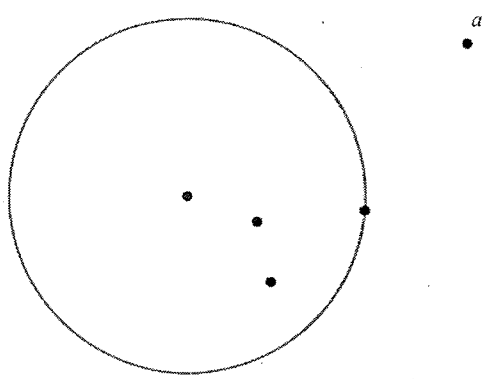
$$\begin{aligned}\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b g(x)\sum_{j=1}^n c_j f_j(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b g(x)f_j(x)\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

由练习题 10.2.4 的注可知

$$g(x) \equiv \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \equiv 0, x \in [0,1]$$

即 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 线性相关. □

5. 解答: 任取一个点 $\boldsymbol{p}_n$ 作为圆心, 以 $d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{|\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_i|\}$ 为半径作圆盘 $O_d(\boldsymbol{p}_n)$, 则圆盘 $O_d(\boldsymbol{p}_n)$ 覆盖了 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_k$, 这说明能覆盖所有点的最小圆盘半径 $r \leqslant d$.



我们断言能覆盖所有点的最小圆盘的圆心 $\boldsymbol{a}$ 一定在圆盘 $O_d(\boldsymbol{p}_n)$ 内. 否则 $\boldsymbol{a}$ 点与 $\boldsymbol{p}_n$ 的距离会大于 d, 这与 $r \leqslant d$ 矛盾. 圆盘 $O_d(\boldsymbol{p}_n)$ 是一个闭区域, 而 r 是关于 $\boldsymbol{a}$ 的连续函数, 所以一定能在圆盘 $O_d(\boldsymbol{p}_n)$ 内取到 r 的最小值.

注: (1) 本题结论可以直接推广到 $\mathbb{R}^n$ 中.

(2)r 是关于 $\boldsymbol{a}$ 的连续函数, 这是显然的, 因为距离函数连续, 而 $r = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}_i)$ 是

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

k 个距离函数取 max, 也是连续的.

(3) 本题的背景是最小圆覆盖问题, 它最早由英国数学家 Sylvester 提出. □

6. 解答: 引理 (Rayleigh 商定理): 对任意实对称矩阵 $\boldsymbol{C}$, 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的 n 个特征值, 记 $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 是其中的最小最大特征值, 则有

$$\lambda_{\min} \leqslant \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} \leqslant \lambda_{\max}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

证: $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $\boldsymbol{C}$ 是实对阵矩阵. 由线性代数的知识知存在正交线性替换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 使得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

又

$$\lambda_{\min}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}) = \lambda_{\min}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y} = \lambda_{\min}y_1^2 + \lambda_{\min}y_2^2 + \cdots + \lambda_{\min}y_n^2$$
$$\lambda_{\max}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}) = \lambda_{\max}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y} = \lambda_{\max}y_1^2 + \lambda_{\max}y_2^2 + \cdots + \lambda_{\max}y_n^2$$

由 $\lambda_{\min} \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{\max}, i = 1, 2, \cdots, n$ 可知

$$\lambda_{\min}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda_{\max}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\lambda_{\min} \leqslant \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} \leqslant \lambda_{\max}$$

往证本题: 由于 $\boldsymbol{B}$ 正定, 故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{L}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}$, 则

$$G(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right) = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}}$$

记 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, $\lambda_{\max}$ 为 $(\boldsymbol{L}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L})^{-1}$ 的最大特征值, 则由引理得

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \leqslant \lambda_{\max}$$

$G(\boldsymbol{x})$ 在 E 上的最大值是可以取到的, 下面来求出最大值点.

由于任意 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}$ 有相同非零特征值, 故 $\lambda_{\max}$ 事实上也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 的最大特征值.

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值为 $\lambda_{\max} = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. 现在把 $(\boldsymbol{L}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L})^{-1}$ 对角化, 取正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \overset{def}{=\!=} \Lambda$$

令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z}$, 则

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$G(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i z_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2}$$

取 $z_1\neq 0, z_2=z_3=\cdots=z_n=0$, 则 $G(\boldsymbol{x})=\lambda_1=\lambda_{\max}$. 此时有

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}z_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 λ_i 的特征向量. 容易验证

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}z_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}(z_1\boldsymbol{\alpha}_1)$$

$$=\boldsymbol{L}^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1\cdot z_1=\lambda_1\boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}z_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\lambda_1\boldsymbol{X}$$

所以 $\boldsymbol{X}$ 是矩阵 $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{-1}$ 的特征向量.

注: 也可以将 Rayleigh 商视作有界闭集上的多元连续函数性质以及条件极值来说明, 可参看李炯生 7.6 节. □

第二组参考题 学员: d39

1. 解答: 由题设可知 T^{n_0} 是一个压缩映射, 由命题 18.2.5 知 T^{n_0} 存在唯一不动点 $\boldsymbol{x}^*$, 即

$$T^{n_0}(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{x}^*$$

那么有

$$T(T^{n_0}\boldsymbol{x}^*)=T^{n_0}(T\boldsymbol{x}^*)=T^{n_0}(\boldsymbol{x}^*)$$

这说明 $T^{n_0}(\boldsymbol{x}^*)$ 是 T 的唯一不动点. □

2. 解答: 设 $g(\boldsymbol{x})=|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}|$, 则 g 在紧集 Ω 上连续 (由题设知 f 一致连续从而连续从

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

而 g 连续), 从而 g 在 Ω 上取得到最小值 a. 假设 $g(\xi)=|f(\xi)-\xi|=a>0$. 由题设可知 $f(\xi)\in\Omega$, 则我们有

$$|g(f(\xi))|=|f(f(\xi))-f(\xi)|<|f(\xi)-\xi|=a$$

与 a 是最小值矛盾. 所以 $a=0$, 即存在不动点 x^* 使得 $f(x^*)=x^*$.

注: 题目的条件不可以改动.

(i) 若去掉有界集的条件, 则可取反例

$$f(x)=\begin{cases}e^{ax},x\in(-\infty,1)\\ x+\dfrac{1}{4x},x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

其中 a 是满足 $ae^a=\dfrac{3}{4}$ 的解, 其近似值为 0.47. 此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且 $0<f'(x)<1$, 则

$$|f(x)-f(y)|=f'(\xi)|x-y|<|x-y|$$

但是 $y=x$ 是 $f(x)$ 的渐近线, 因此不动点不能够取到. 并且 f 将 $\mathbb{R}$ 映到 $(0,+\infty)\subset\mathbb{R}$, 而 $\mathbb{R}$ 是开闭集, 满足题设.

(ii) 若去掉闭集条件, 则可取反例 $f(x)=\sin x, x\in(0,\pi/2)$, 它将 $(0,\pi/2)$ 映到 $(0,1)\subset(0,\pi/2)$ 且此时满足

$$|\sin x-\sin y|=\cos\xi|x-y|<|x-y|$$

但 $\sin x=x$ 的解显然只有 $x=0$; 所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi/2)$ 上不存在不动点.

注: 满足本题条件的映射 f 称为严格非扩张映射. □

3. 解答: 显然 X 连通等价于 X 没有非平凡的既开又闭集.

充分性: 若 X 不连通, 则存在非不交空开集 A,B 使得 $X=A\cup B$, 于是 $A=X\backslash B$ 是非平凡既开又闭集, 矛盾. 故 X 连通.

必要性: 若 X 存在非平凡既开又闭集 A, 则 A 和 $X\backslash A$ 是非空不交开集且有 $X=A\cup(X\backslash A)$, 与 X 连通矛盾. 故 X 不存在非平凡既开又闭集.

现证本题: 设 f 连续, X 连通, 考虑 $f(X)$ 的每个非平凡既开又闭集的原像是既开又闭集, 如果 $f(X)$ 不连通则会导致 X 不连通的矛盾, 故 $f(X)$ 连通. □

4. 解答: 只证第 (1) 问, 第 (2) 问类似. 我们证明如下断言等价 (有界性可见第 5 题):

(i) $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处上半连续;

(ii) $\overline{\lim\limits_{\Omega\ni\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}} f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{x}_0)$;

(iii) $\forall\boldsymbol{x}_n:\boldsymbol{x}_n\in E,\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0$, 必有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(\boldsymbol{x}_n)\leqslant f(\boldsymbol{x}_0)$.

(i)⇒ (ii): 明显, 因 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|\boldsymbol{x}|\in\Omega$ 时有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon$$

对上式取极限即得 (ii).

(ii)⇒ (iii): 由

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(\boldsymbol{x}) = \max\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} f(\boldsymbol{x}_n) \,|\boldsymbol{x}_n \in \Omega, \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x_0}\,(\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{x_0})\right\}$$

直接可得.

(iii)⇒ (i) 反证 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处不上半连续, 则

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta_n = \frac{1}{n} > 0, \exists \boldsymbol{x}_n \in \Omega, 0 < |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x_0}| < \delta_n = \frac{1}{n}$$

使得 $f(\boldsymbol{x}_n) \geqslant f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon_0$, 这与 (iii) 矛盾.

注: 若 $f(\boldsymbol{x})$ 既上半连续又下半连续, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 连续. □

5. 解答: 只证上半连续函数有上界且能达到最大值, 下半连续情形类似. 先证有上界:

若 $f(\boldsymbol{x})$ 无界, 则存在 $\boldsymbol{x}_n \in \Omega$ 使得 $f(\boldsymbol{x}_n) > n (n = 1, 2, \cdots)$. 由凝聚定理, 在 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 中存在收敛得子序列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$, 使 $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}_0$(当 $k \to +\infty$). 因 Ω 是紧集, 故 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$. 但 $f(\boldsymbol{x}_{n_k}) > n_k$, 当 $k \to +\infty$ 时 $f(\boldsymbol{x}_{n_k}) \to +\infty$, 所以 $\overline{\lim_{x\to x_0}} f(\boldsymbol{x}) = +\infty$. 但 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上上半连续, 由第 4 题知 $\overline{\lim_{x\to x_0}} f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0)$, 故 $f(\boldsymbol{x}_0) = +\infty$, 矛盾.

再反证 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上达不到上确界 M, 则 $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, f(\boldsymbol{x}) < M$, $M - f(\boldsymbol{x}) > 0$, 所以可知 $\dfrac{1}{M - f(\boldsymbol{x})}$ 在 Ω 上上半连续 (用定义显然), 从而有上界, 即存在 $M' > 0$, 使 $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$ 有

$$\frac{1}{M - f(\boldsymbol{x})} < M' \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) < M - \frac{1}{M'}$$

这与 M 是上确界矛盾. □

6. 解答: 我们证明 $f(\boldsymbol{x})$ 下半连续. 否则存在 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0, \exists N, \forall n > N$ 有 $f(\boldsymbol{x}_n) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon$. 从而有

$$\varepsilon \leqslant \sup_k f_k(\boldsymbol{x}_0) - \sup_k f_k(\boldsymbol{x}_n) \leqslant \sup_k (f_k(\boldsymbol{x}_0) - f_k(\boldsymbol{x}_n))$$

令 $n \to \infty$ 得 $\varepsilon \leqslant 0$, 矛盾. 所以 $f(\boldsymbol{x})$ 下半连续, 再由上一题结论可知 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上可达最小值. □

7. 解答:

(1) 由序列 $\{\boldsymbol{f}_n\}$ 的构造可知, 若 $m \leqslant n$, 则对于每个 $t \in [0,1]$, 能以找到边长为 $1/2^m$ 的小三角形同时含有 $\boldsymbol{f}_m(t)$ 和 $\boldsymbol{f}_n(t)$, 因此在 $[0,1]$ 上成立

$$|\boldsymbol{f}_m(t) - \boldsymbol{f}_n(t)| \leqslant 1/2^m$$

于是连续映射序列 $\boldsymbol{f}_n$ 在 $[0,1]$ 上收敛于一个连续映射 $\boldsymbol{f} : [0,1] \to \Delta$, 且 $\boldsymbol{f}$ 满足

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$|\boldsymbol{f}_m(t)-\boldsymbol{f}(t)|\leqslant 1/2^m,\quad t\in[0,1]$$

并且 $\{\boldsymbol{f}_n\}$ 的收敛性还是一致的.

(2) 首先说明 Δ 上的每一点都是 $\boldsymbol{f}$ 的像集的聚点 (即该点的任何邻域中都包含 $\boldsymbol{f}$ 的像集的中的无限多个点). 从 $\{\boldsymbol{f}_n\}$ 的构造可知: $\boldsymbol{f}_n$ 的像到 Δ 上任一点的距离不超过 $1/2^n$. 对于 Δ 上任一点 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 U, 取 N 充分大, 使得 $O_{1/2^{N-1}}(\boldsymbol{a})\subset U$, 并且取 $t_0\in[0,1]$ 使得

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f}_N(t_0)|\leqslant 1/2^N$$

因此

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f}(t_0)|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}_N(t_0)|+|\boldsymbol{f}_N(t_0)-\boldsymbol{f}(t_0)|\leqslant 1/2^N+1/2^N=1/2^{N-1}$$

所以 $\boldsymbol{f}(t_0)\in O_{1/2^{N-1}}(\boldsymbol{a})\subset U$, 这说明 $\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 像集的聚点.

显然 $\boldsymbol{f}([0,1])\subset\Delta$, 而 $\boldsymbol{f}$ 是连续映射, 所以 $\boldsymbol{f}([0,1])$ 为有界闭集, 从而 $\boldsymbol{f}([0,1])$ 包含它的所有聚点, 于是 $\boldsymbol{f}([0,1])=\Delta$. □

8. 解答:

(1) 由例题 18.2.7 易知 $g_k(\boldsymbol{x})$ 连续. 注意到

$$g_k(A_k)=-\frac{2^{k-1}}{3^k},g_k(B_k)=\frac{2^{k-1}}{3^k},g(D-(A_k\cup B_k))\in\left(-\frac{2^{k-1}}{3^k},\frac{2^{k-1}}{3^k}\right)$$

迭代可得

$$|\varphi_k(\boldsymbol{x})|\leqslant\frac{2^{k-1}}{3^k}M,\forall\boldsymbol{x}\in D,\quad |g_k(\boldsymbol{x})|\leqslant\frac{2^{k-1}}{3^k}M,\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

显然 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k(\boldsymbol{x})\rightrightarrows g(\boldsymbol{x})$(因为 $g_k(\boldsymbol{x})$ 连续所以 $g(\boldsymbol{x})$ 也连续), 且 $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D$.

(2) 构造同胚映射

$$h:(-1,1)\to(-\infty,+\infty):x\mapsto\tan 2\pi x$$

则 $h^{-1}\circ f$ 有界, 取它的扩张 g', 并注意到

$$h^{-1}\circ f((-\infty,1]\cup[1,+\infty))=\varnothing$$

此时 $g'=\sum\limits_{k=1}^{\infty}g'_n$ 有 $g'_k(\boldsymbol{x})<\dfrac{2^{k-1}}{3^k}$, 从而有

$$g'(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(\boldsymbol{x})<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k}=1$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故可取 $g = h \circ g'$, 它满足 $h \circ (h^{-1} \circ f) = f, \boldsymbol{x} \in D$. □

9. 解答: 考虑在 $\mathbb{R}$ 上, 令 $f(x) = \sin 1/x$ 在开集 $(0,1)$ 上连续, 但是它不可能有全空间上的连续扩张 $f^*(x)$, 否则 $f^*(x)$ 必然在 0 处间断, 与 $f^*(x)$ 连续矛盾. 但是如果开集上的 $f(x)$ 一致连续, 则是可以做到的, 因为只要在开区间断点上补充定义就可以让 $f(x)$ 在闭集上连续, 再用上一题的 Tietze 扩张定理即可.

注: 一般度量空间上一致连续函数的延拓定理依然成立, 并且还可以使延拓后的函数在全空间上一致连续, 详情参见徐森林第二册 P37 定理 7.4.6 与徐森林上册 P300 第 315 题. □

10. 解答: 我们证明更一般的命题: $\mathbb{R}^n$ 的稠子集上的一致连续函数可惟一扩张到全空间. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 的稠子集 E 上的一致连续函数, 分以下证明此命题:

(1) 由 E 是稠子集可知对 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, 存在 $\boldsymbol{x}_n \in E$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0$. 我们证明 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 收敛. 事实上由于 f 的一致连续性, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对于任意的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$, 当 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta$ 时, 有 $|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \varepsilon$. 由 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的收敛性, 对于这个 $\delta > 0$, 存在 N, 当 $n, m > N$ 时有 $|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m| < \delta$, 从而有 $|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{x}_m)| < \varepsilon$, 得证.

(2) 另设 $\boldsymbol{x}'_n \in E$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{x}_0$, 我们证明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n)$. 假设不然, 则令 $\boldsymbol{y}_{2n} = \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_{2n-1} = \boldsymbol{x}'_n$, 则有 $\boldsymbol{y}_n \in E$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{x}_0$, 但 $\{f(\boldsymbol{y}_n)\}$ 发散, 与 (i) 矛盾.

(3) 现在定义 $f^*(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n), \forall x \in E$, 其中 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个收敛于 $\boldsymbol{x}$ 的序列, 可见这样的函数是唯一的. 下面验证 f^* 是 f 的连续扩张.

(i) 对 $\forall \boldsymbol{x} \in E$, 令 $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$ 可得 $f^*(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{x})$. 即 $f^*(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in E$.

(ii)$\forall \boldsymbol{x}_0 \in E$, 可以找到有界集 $F \subset \mathbb{R}^n$ 包含 $\boldsymbol{x}_0$, 我们证明在 $f^*(\boldsymbol{x})$ 在 F 上一致连续即可由 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性知 $f^*(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处连续. 实际上, 由已知 f 在 E 上一致连续可知对任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 对于任意的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$, 当 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta_1$ 时有

$$|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \varepsilon/3$$

取 $\delta = \delta_1/3$, 可以证明这时对于任意的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in F$, 当 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \varepsilon$$

这是因为对任意的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in F$, 存在 $\boldsymbol{x}'_n, \boldsymbol{x}''_n \in E$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{x}_1, \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}''_n = \boldsymbol{x}_2$. 由 (1) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}'_n)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}''_n)$ 存在, 极限就是 $f^*(\boldsymbol{x}_1)$ 和 $f^*(\boldsymbol{x}_2)$, 可取充分大的 n_0 使得

$$|\boldsymbol{x}'_{n_0} - \boldsymbol{x}_1| < \delta_1/3, \quad |\boldsymbol{x}''_{n_0} - \boldsymbol{x}_2| < \delta_1/3$$

则有

$$|f^*(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}'_{n_0})| < \varepsilon/3, \quad |f^*(\boldsymbol{x}_2) - f(\boldsymbol{x}''_{n_0})| < \varepsilon/3$$

此时有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$|\boldsymbol{x}'_{n_0}-\boldsymbol{x}''_{n_0}|\leqslant|\boldsymbol{x}'_{n_0}-\boldsymbol{x}_1|+|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|+|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}''_{n_0}|<\delta_1/3+\delta_1/3+\delta_1/3=\delta_1$$

由 f 的一致连续性可知

$$|f(\boldsymbol{x}'_{n_0})-f(\boldsymbol{x}''_{n_0})|<\varepsilon/3$$

从而

$$|f^*(\boldsymbol{x}_1)-f^*(\boldsymbol{x}_2)|\leqslant|f^*(\boldsymbol{x}_1)-f(\boldsymbol{x}'_{n_0})|+|f(\boldsymbol{x}'_{n_0})-f(\boldsymbol{x}''_{n_0})|+|f(\boldsymbol{x}''_{n_0})-f^*(\boldsymbol{x}_2)|<\varepsilon$$

综上可知, f^* 是 f 的连续扩张. 有理点集是 $\mathbb{R}^n$ 上的稠子集, 因此命题得证. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第十九章 偏导数与全微分

§19.2.3 思考题 学员: d39

1. 解答: 前半问: 因为当 y 取定 y_0 后 $f(x,y_0)$ 是关于 x 的一元函数, 可导必连续. 后半问: $f(x,y_1)$ 未必在 x_0 处连续, 还需要 $f(x,y)$ 关于 y 也连续. □

2. 解答:

(1) 考虑

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(r)(r \to 0)$$

令 $\Delta y = 0$ 可得

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

令 $\Delta x = 0$ 可得

$$B = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

(2) 显然当 $\Delta x, \Delta y \to 0$ 时 $\Delta z \to 0$, 即 f 在 (x_0,y_0) 处连续. □

3. 解答:

(1) 取 $f(x,y) = \begin{cases} xy, x^2+y^2 \neq 0 \\ 1, x^2+y^2 = 0 \end{cases}$.

(2) 取 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, 显然在 $(0,0)$ 处连续, 但是

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

显然 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 不存在, 同理 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 也不存在.

(3) 取

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

可求得

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

不存在 (考虑趋近路线 $y=x$). 因此 $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续. 同理 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处也不连续. □

4. 解答: 考虑

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\=&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\\=&f_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y+f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\end{aligned}$$

由于 f_y 在 (x_0,y_0)(连续,)可设

$$f_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y=f_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta y(\alpha\to 0,\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)$$

由有限增量公式及 $f_x(x_0,y_0)$ 存在知

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)=f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f\left(x_0,y_0\right)+\beta\Delta x(\beta\to 0)$$

于是我们有

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+f_y(x_0,y_0)\Delta y+f_x(x_0,y_0)\Delta x+\alpha\Delta y+\beta\Delta x$$

即 f 在 (x_0,y_0) 处可微. □

5. 解答: 对任意固定的 $y_0\in(c,d)$, 取 $\{(x,y_0)|x\in(a,b)\}$ 内的任意两点 $\boldsymbol{X_1},\boldsymbol{X_2}$, 则线段 $\overline{\boldsymbol{X_1X_2}}$ 是闭集. 由全微分恒为 0 知 $f_y\equiv 0$, 则对任意 $\boldsymbol{x}_0\in\overline{\boldsymbol{X_1X_2}}$, 存在邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 使得 $f(x,y)\equiv F(x)$. 由有限覆盖定理, 存在有限个邻域 $O_{\delta_i}(\boldsymbol{x}_i)$ 使得 $f(x,y)\equiv F_i(x),x\in O_{\delta_i}(\boldsymbol{x}_i)i=1,2,\cdots,n$. 这说明在线段 $\overline{\boldsymbol{X_1X_2}}$ 上 $f(x,y)$ 只与 x 有关, 由 $\boldsymbol{X_1},\boldsymbol{X_2}$ 的任意性知在 $\{(x,y_0)|x\in(a,b)\}$ 上 $f(x,y)$ 只与 x 有关. 然后垂直移动 y_0, 则可说明在 D 内 $f(x,y)$ 只与 x 有关. 同理可知在 D 内 $f(x,y)$ 只与 y 有关, 故只能有 $f(x,y)\equiv C,(x,y)\in D$.

注: 本题也可以直接用练习题 19.2.4 第 7 题的结论, 由于 D 是开矩形, 折线的构造方法就是水平和垂直线段的拼接. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§19.2.4 练习题 学员: d39

1. 解答:

(1) 考察

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|x-y|}\cdot\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0\cdot 1 = 0 = f(0,0)$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(2) 考察

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|}\sin(\Delta x)^2}{(\Delta x)^3}$$

取 $\Delta x > 0$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)^2}{(\Delta x)^{5/2}}$$

不存在. 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. □

2. 解答:

(1)

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

(2) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$f_x = y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

易见 f_x 在 $(0,0)$ 处重极限不存在 (第一项重极限为 0, 第二项考虑路径 $y=x$), 因此 f_x 在 $(0,0)$ 处不连续. 同理可知 f_y 在 $(0,0)$ 处不连续.

(3) 考察当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时

$$\left|\frac{\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\rho}\right| = \left|\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right|$$

$$\leqslant \frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{2\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{2}\to 0$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

3. 解答: 记 $|f_x| \leqslant M, |f_y| \leqslant M$, 则对 $\forall (x_0, y_0, z_0) \in D$ 有

$$\begin{aligned}
&|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)| \\
\leqslant &|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)| \\
&+ |f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)| \\
&+ |f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)| \\
\leqslant &|f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)\Delta x| + |f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y, z_0+\Delta z)\Delta y| \\
&+ |f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)| \\
\leqslant &M|\Delta x| + M|\Delta y| + |f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)|
\end{aligned}$$

当 $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ 时, 结合题设可知

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) \to f(x_0, y_0, z_0)$$

即 $f(x,y,z)$ 在 D 上连续. □

4. 解答: $\mathrm{d}u = u_x(1,2)\mathrm{d}x + u_y(1,2)\mathrm{d}y = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}x + \dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$. □

5. 解答:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V_D(D_0, H_0)\Delta D + V_H(D_0, H_0)\Delta H \\
&\leqslant \frac{1}{2}\pi DH(D_0, H_0)|\Delta D| + \frac{1}{4}\pi D^2(D_0, H_0)|\Delta H| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\pi \cdot 10.44 \cdot 18.36 \cdot 0.02 + \frac{1}{4}\pi \cdot 10.44^2 \cdot 0.01 \approx 6.88
\end{aligned}$$

而 $V = \dfrac{1}{4}\pi D_0^2 H_0 \approx 1571.68$, 则相对误差 $\Delta V/V \approx 0.004$. □

6. 解答: 记 $|f_y| \leqslant L$, 则

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |f_y(x, y_1+\theta(y_2-y_1))||y_1-y_2| \leqslant L|y_1-y_2|$$

即 $f(x,y)$ 对 y 满足一致 Lipschitz 条件. □

7. 解答: 取 D 内任意两点 $\boldsymbol{X}_0 = (x_0, y_0), \boldsymbol{X} = (x, y)$, 由区域的 (道路) 连通性, 则有位于 D 内的连续折线连接 $\boldsymbol{X}_0$ 和 $\boldsymbol{X}$. 设折线的折点为 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_{n-1}, \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{X}$:

$$\overline{\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_1}, \overline{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2}, \cdots, \overline{\boldsymbol{X}_{n-1}\boldsymbol{X}_n} \subset D$$

对于线段 $\overline{\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_1}$ $(\boldsymbol{X}_1 = (x_1, y_1))$, 应用中值公式可知

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{X}_1) - f(\boldsymbol{X}_0) = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) \\
=&f_x(x_0+\theta(x_1-x_0), y_0+\theta(y_1-y_0))(x-x_0) \\
&+ f_y(x_0+\theta(x_1-x_0), y_0+\theta(y_1-y_0))(y-y_0) = 0
\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

即 $f(\boldsymbol{X}_1)=f(\boldsymbol{X}_0)$. 类似可知 $f(\boldsymbol{X}_1)=f(\boldsymbol{X}_2)=\cdots=f(\boldsymbol{X}_n)$, 从而可知 $f(x,y)$ 在 D 上为常值函数.

注: (1) 若直接从 $f_y=0$ 得到 $f(x,y)$ 只与 x 有关, 从 $f_x=0$ 得到 $f(x,y)$ 只与 y 有关, 推出 f 只能是常数, 这是错误的 (尽管很诱人). 实际上, 由 $f_y(x_0,y_0)=0$ 只能说明存在 (x_0,y_0) 的一个邻域, 在其内 $f(x,y)$ 只与 x 有关, 而不能推广到整个区域 D, 有反例

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\quad D=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y):x\geqslant 0,y=0\}$$

在 D 内 $f_y=0$ 但 $f(x,y)$ 与 y 有关.

(2) 更严谨细致的证明过程参见陈纪修推论 12.3.1. □

8. 解答: 由上题结论, 只要证明 $u_x=u_y=v_x=v_y=0$. 事实上, 由于 $u^2+v^2=C$, 分别对 x 和 y 求偏导可得

$$uu_x+vv_x=0,uu_y+vv_y=0$$

$$\Rightarrow uu_x=-vv_x,uu_y=-vv_y$$

由题设 $u_x=v_y,u_y=-v_x$ 可知

$$uv_y=-vv_x,uv_x=vv_y$$

$$\Rightarrow (u^2+v^2)v_y=u(uv_y)+v(vv_y)=0,(u^2+v^2)v_x=u(uv_x)+v(vv_x)=0$$

因此 $v_x=v_y=0$. 同理可证 $u_x=u_y=0$. □

9. 解答: 考虑

$$|f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)|\leqslant|f(\Delta x,\Delta y)-f(0,\Delta y)|+|f(0,\Delta y)-f(0,0)|$$

由于 $f(x,0)$ 在 $x=0$ 处连续, 故当 $\Delta x\to 0$ 时有

$$|f(\Delta x,\Delta y)-f(0,\Delta y)|\to 0$$

记 $|f_y|\leqslant M$, 则当 $\Delta y\to 0$ 时有

$$|f(0,\Delta y)-f(0,0)|=|f_y(0,\theta\Delta y)\Delta y|\leqslant M\Delta y\to 0$$

由此看出

$$|f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)|\to 0$$

即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§19.3.4　练习题　学员: d39

1. 解答: $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial t}=se^x+\cos y+1.$ □

2. 解答: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial s},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{1}{z},\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{\partial u}{\partial t}\cdot\dfrac{y}{z^2}.$ □

3. 解答: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial s}:\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial y}.$ □

4. 解答: $\dfrac{\partial u}{\partial s}=e^x\sin y\cdot 2t+e^x\cos y\cdot 2s,\dfrac{\partial u}{\partial t}=e^x\sin y\cdot 2s+e^x\cos y.$ □

5. 解答: 令 $t=ax^2+by^2+cz^2$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot 2ax,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot 2by,\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot 2cz$$

所以

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial f}{\partial t}(2ax\mathrm{d}x+2by\mathrm{d}y+2cz\mathrm{d}z)$$ □

6. 解答: 由于

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z}\cdot x^{\frac{1}{z}-1}\Big|_{(1,1,1)}=1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^{\frac{1}{z}}\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)y^{-\frac{1}{z}-1}\Big|_{(1,1,1)}=-1$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}\cdot\ln\frac{1}{z}\Big|_{(1,1,1)}=0$$

所以 $\mathrm{d}f(1,1,1)=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$ □

7. 解答: 令 $s=xy,t=yz$, 则

$$x\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial s}\cdot xy,z\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial t}\cdot yz,y\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial s}\cdot xy+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot yz$$

显然命题得证. □

8. 解答: 令 $t=xy$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial t}\cdot xy-\dfrac{\partial z}{\partial t}\cdot xy=0.$ □

9. 解答: 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\theta=\frac{x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}}{r}=0$$

即 $F(x,y)$ 在极坐标系下只是 θ 的函数. □

10. 解答: 由题设 $F(x,y)=h(\theta)$, 则由 $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$ 知 $F(x,y)=\varphi(v)$, 其中 $v=\dfrac{y}{x}$. 则

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\varphi'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\varphi'\cdot\frac{1}{x},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\varphi''\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\varphi'\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi\cdot\left(-\frac{y}{x^3}\varphi''-\frac{1}{x^2}\varphi'\right)=F\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$$

由本章参考题第 3 题的结论可知

$$F\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{y}{x^3}\varphi'^2$$

$$\Rightarrow \varphi\cdot\left(-\frac{y}{x^3}\varphi''-\frac{1}{x^2}\varphi'\right)=-\frac{y}{x^3}\varphi'^2$$

再代入 $v=\dfrac{y}{x}$ 可得

$$\varphi(-v\varphi''-\varphi')=-v\varphi'^2\Rightarrow v(\varphi\varphi''-\varphi'^2)=-\varphi\varphi'\Rightarrow\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)'=-\frac{1}{v}\frac{\varphi'}{\varphi}$$

令 $\psi=\dfrac{\varphi'}{\varphi}$, 则

$$\psi'=-\frac{1}{v}\psi\Rightarrow\psi=\frac{C_1}{v}\Rightarrow\frac{\varphi'}{\varphi}=\frac{C_1}{v}\Rightarrow\varphi=C_2v^{c_1}\Rightarrow F(x,y)=C_2\left(\frac{y}{x}\right)^{C_1}$$

注: 若 $F(r\cos\theta,r\sin\theta)=h(r)$, 则 $F(x,y)=C_1e^{C_2(x^2+y^2)}$, 参见裴礼文 P676 6.2.26. □

11. 解答: 计算得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''(x+at)+a^2\psi(x-at),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+at)+\psi''(x-at)$$

易见成立题设等式 (弦振动方程). □

12. 解答:

(1) 由题意可知

$$f_u^2=g_v^2,\quad f_v^2=g_u^2,\quad f_ug_u+f_vg_v=g_vg_u+(-g_u)g_v=0$$

$$f_{uu}+f_{vv}=(g_v)_u+(-g_u)_v=0,\quad g_{uu}+g_{vv}=(-f_v)_u+(f_u)_v=0$$

$$\begin{aligned}
w_u=&w_xf_u+w_yg_u\\
w_{uu}=&(w_{xx}f_u+w_{xy}y_u)f_u+w_xf_{uu}+(w_{yx}f_u+w_{yy}g_u)g_u+w_yg_{uu}\\
w_{vv}=&(w_{xx}f_v+w_{xy}g_v)f_v+w_xf_{vv}+(w_{yx}f_v+w_{yy}g_v)g_v\\
w_{uu}+w_{vv}=&w_{xx}(f_u^2+f_v^2)+2w_{xy}(f_ug_u+f_vg_v)+w_{yy}(g_u^2+g_v^2)\\
&+w_x(f_{uu}+f_{vv})+w_y(g_{uu}+g_{vv})=(w_{xx}+w_{yy})(f_u^2+f_v^2)=0
\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2) 令 $w=xy$ 即可. □

13. 解答:

必要性: 令 $t=ax+by$, 则 $b\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot ab=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

充分性: 令 $t=ax+by, s=-bx+ay$, 则有

$$\begin{cases} x=\dfrac{at-bs}{a^2+b^2} \\ y=\dfrac{bt+as}{a^2+b^2} \end{cases}$$

更简单..

$$\begin{cases} t=ax+by \\ s=ax-by \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{t+s}{2a} \\ y=\frac{t-s}{2b} \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{1}{2a}+\frac{\partial z}{\partial y}\left(-\frac{1}{2b}\right)$$

$$=0$$

因此 z 是关于 t 和 s 的函数, 又因为

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{a}{a^2+b^2}=0$$

所以 z 是仅关于 t 的函数. □

14. 解答: 对 $F(u_x,u_y)$ 分别对 x,y 求偏导有

$$\begin{cases} F_s(u_x,u_y)\cdot u_{xx}+F_t(u_x,u_y)\,u_{yx}=0 \\ F_s(u_x,u_y)\cdot u_{xy}+F_t(u_x,u_y)\,u_{yy}=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{yx} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_s \\ F_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因 $\begin{pmatrix} F_s \\ F_t \end{pmatrix}$ 是非零解, 故系数矩阵的行列式为 0, 即

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{yx} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix}=u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=0$$

得证. □

15. 解答: 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 则 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan\dfrac{y}{x}, u=f(\rho)$, 且有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{\partial t}{\partial \rho}\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{\partial t}{\partial \rho}\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

相加即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2}=0=f''(\rho)+f'(\rho)\cdot\frac{1}{\rho}$$

解微分方程得 $f=C_1\ln\rho+C_2$, 因此 $u(x,y)=C_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+C_2$. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§19.4.2 练习题 学员: d39

1. 解答: 由题设可知

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-Ah|}{|h|}=0$$

即 $f(x)$ 在 x_0 处可微, 那么由命题 19.4.1 可知

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-Jf(x_0)h|}{|h|}=0$$

令 $B=A-Jf(x_0)$, 由不等式

$$|Bh|\leqslant|f(x+h)-f(x)-Ah|+|f(x+h)-f(x)-Jf(x_0)h|$$

即知当 $h\to 0$ 时有

$$\frac{|Bh|}{|h|}\to 0$$

对于固定的 h, 取 $t\to 0$ 则有

$$\frac{|B(th|)}{|th|}\to 0$$

由于 B 是线性的, 上式左端与 t 无关, 因此对所有 $h\in\mathbb{R}^n$ 都有 $Bh=0$, 从而 $B=O$. 即有 $A=Jf(x_0)$, 得证. □

2. 解答: 由向量值函数的运算法则可知

$$(|f(t)|^2)'=(f(t)\cdot f(t))'=2f'(t)\cdot f(t)$$

易见 $|f(t)|$ 为常值当且仅当 $f'(t)f(t)=0$.

注: (1) 几何意义即: 如果向量值函数 $f(t)$ 的长度不变, 那么 $f(t)$ 与 $f'(t)$ 垂直.

(2) 类似的还有: 如果向量值函数 $f(t)$ 的方向不变, 那么 $f(t)\times f'(t)=0$, 参见陈维桓《微分几何初步》P7 定理 2.

(3) 向量值函数的运算法则参见陈维桓《微分几何初步》P7 定理 1. □

3. 解答: 记 $f:(x,y)\to(u,v)$. 若存在 $a=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 使 $\det Jf(a)=0$, 则存在 $h\in\mathbb{R}^2$ 使得 $h\neq 0$ 且 $Jf(a)h=0$. 由 f 连续可微可知, 当实数 $t\to 0$ 时有

$$f(a+th)-f(a)=Jf(a)(th)+o(th)=o(th)$$

由此可知, 当 $|t|$ 充分小时有

$$\|f(a+th)-f(a)\|\leqslant\frac{\sqrt{C}\|h\|}{2}|t|$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

而题设不等式等价于

$$\sqrt{(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2}\geqslant\sqrt{C}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

即有

$$\sqrt{C}\|t\boldsymbol{h}\|\leqslant\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\leqslant\frac{\sqrt{C}\|\boldsymbol{h}\|}{2}|t|$$

可得 $C=0$, 矛盾.

注: (1) 本题容易推广到 n 维情形.

(2) 其他证法较复杂, 参见裴礼文 P743 练习题 6.4.23. □

19.5.2　**参考题**　学员: d39

1. 解答: 直接计算可得

$$\left|\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right|=\left|\frac{(x^2-2t)}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right|=\left|\left(\frac{x^2}{8t}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}t^{3/2}}\right|e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$\leqslant\left(\frac{x^2}{8t}+\frac{1}{4}\right)\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi}t^{3/2}}$$

因为当 $y>0$ 时由 $y<e^y$, 所以

$$\frac{x^2}{8t}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\leqslant e^{\frac{x^2}{8t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}=e^{-\frac{x^2}{8t}}$$

而

$$e^{-\frac{x^2}{4t}}\leqslant e^{-\frac{x^2}{8t}}$$

取 $\lambda=\dfrac{1}{8},C=\dfrac{5}{4}$, 则有

$$\left|\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right|\leqslant Ct^{-3/2}e^{-\lambda\frac{x^2}{t}}$$

注: 本题中的 $u(x,t)$ 满足热传导方程 (例题 19.1.2), 利用这个性质可以使求二阶偏导变得更便利. □

2. 解答:

(1)

$$\left|\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\right|=\frac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-3/2}\cdot(z-\zeta)$$
$$\leqslant\frac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-3/2+1/2}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-1}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2\Gamma}{\partial y\partial z}\right| &= \frac{3}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-5/2}\cdot(y-\eta)(z-\zeta)\\ &\leqslant \frac{3}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-5/2}\cdot\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{2}\\ &\leqslant \frac{3}{8\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-3/2}\end{aligned}$$

(3)

$$\left|\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x\partial y\partial z}\right| = \frac{15}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-7/2}\cdot(x-\xi)(y-\eta)(z-\zeta)$$

利用

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

令 $a^3=(x-\xi)^2, b^3=(y-\eta)^2, c^3=(z-\zeta)^2$ 可有

$$(x-\xi)(y-\eta)(z-\zeta)\leqslant\left[\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{3}\right]^{3/2}$$

因此

$$\left|\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x\partial y\partial z}\right|\leqslant\frac{15}{4\pi}\cdot 3^{-2/3}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-2}$$

得证. □

3. 解答:

充分性: 若 $u(x,y)=f(x)g(y)$, 则有

$$u_x=f'g,\quad u_y=fg',\quad u_{xy}=f'g'$$

显然有

$$uu_{xy}=fgf'g'=u_xu_y$$

必要性: 若 $uu_{xy}=fgf'g'=u_xu_y$, 则

$$0=uu_{xy}-u_xu_y=u^2\frac{u_{yx}u-u_yu_x}{u^2}=u^2\left(\frac{u_y}{u}\right)'_x$$

$$\left(\frac{u_y}{u}\right)'_x=0\Rightarrow\frac{u_y}{u}=h(y)\Rightarrow(\ln|u|)'_y=h(y)\Rightarrow\ln|u|=\int h(y)\mathrm{d}y+c(x)$$

$$\Rightarrow u=\left[\pm e^{c(x)}\right]\cdot e^{\int h(y)\mathrm{d}y}\equiv f(x)g(y)$$

证毕. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

4. 解答:

(i) 命题 19.3.1 的证明:

必要性: 由齐次函数的定义有

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$$

两边对 t 求导得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y)$$

令 $t=1$ 得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=nf(x,y)$$

充分性: 令

$$\varphi(t)=\frac{f(tx,ty)}{t^n}$$

则有

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\frac{xf_x(tx,ty)t^n+yf_y(tx,ty)t^n-nt^{n-1}f(tx,ty)}{t^{2n}}\\&=\frac{nt^{n-1}f(tx,ty)-nt^{n-1}f(tx,ty)}{t^{2n}}=0\end{aligned}$$

得到 $\varphi(t)$ 为常值. 即

$$\varphi(t)=\frac{f(tx,ty)}{t^n}=\varphi(t)=\varphi(1)=f(x,y)$$

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$$

注: 推广结论参见徐森林上册 P350 第 376 题.

(ii) 命题 19.3.2 的证明: 由齐次函数的定义有

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$$

两边对 t 求导得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y)$$

再对 t 求导并令 $x=1$ 即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x,y)=n(n-1)f(x,y)$$

注: 推广结论参见徐森林上册 P350 第 378 题.

(iii) 命题 19.3.3 的证明: 由齐次函数的定义有

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

两边对 x 和 y 分别求导得

$$tf_x(tx,ty)=t^nf_x(x,y)\Rightarrow f_x(tx,ty)=t^{n-1}f_x(x,y)$$
$$tf_y(tx,ty)=t^nf_y(x,y)\Rightarrow f_y(tx,ty)=t^{n-1}f_y(x,y)$$

即 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 都是 $(n-1)$ 次齐次函数.

注: 推广结论参见徐森林上册 P350 第 377 题.

(iv) 命题 19.3.4 的证明: 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 则由齐次函数定义有

$$|f(x,y)|=|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|=|r^nf(\cos\theta,\sin\theta)|=(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}|f(\cos\theta,\sin\theta)|$$

显然 $f(\cos\theta,\sin\theta)$ 定义在 S^1 上, 这是一个闭集, 而由题设知 $f(x,y)$ 在 S^1 上连续, 因此存在 $C>0$ 使得 $|f(\cos\theta,\sin\theta)|\leqslant C$. 即

$$|f(x,y)|\leqslant C(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$$

得证. □

5. 解答: 由 u 的定义可知

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n-1}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_{i-1}&x_i&x_{i+1}&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{k-1}&x_2^{k-1}&\cdots&x_{i-1}^{k-1}&x_i^{k-1}&x_{i+1}^{k-1}&\cdots&x_n^{k-1}\\0&0&\cdots&0&kx_i^{k-1}&0&\cdots&0\\x_1^{k+1}&x_2^{k+1}&\cdots&x_{i-1}^{k+1}&x_i^{k+1}&x_{i+1}^{k+1}&\cdots&x_n^{k+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_{i-1}^{n-1}&x_i^{n-1}&x_{i+1}^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

(1) 根据上式得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n-1}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{k-1}&x_2^{k-1}&\cdots&x_n^{k-1}\\kx_1^{k-1}&kx_2^{k-1}&\cdots&kx_n^{k-1}\\x_1^{k+1}&x_2^{k+1}&\cdots&x_n^{k+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n-1}k\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{k-1}&x_2^{k-1}&\cdots&x_n^{k-1}\\x_1^{k-1}&x_2^{k-1}&\cdots&x_n^{k-1}\\x_1^{k+1}&x_2^{k+1}&\cdots&x_n^{k+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=0$$

(2)

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_i^{k-1} & \cdots & x_n^{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & kx_i^k & \cdots & 0 \\ x_1^{k+1} & x_2^{k+1} & \cdots & x_i^{k+1} & \cdots & x_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_i^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_i^{k-1} & \cdots & x_n^{k-1} \\ x_1^{k} & x_2^{k} & \cdots & x_i^{k} & \cdots & x_n^{k} \\ x_1^{k+1} & x_2^{k+2} & \cdots & x_i^{k+1} & \cdots & x_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_i^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} ku = \frac{(n-1)n}{2} u$$

注: 其他方法参见徐森林上册 P357 第 384 题. □

6. 解答:

(1) 考虑

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{\partial F}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial y_n}\right) \frac{\partial (y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

则有

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{y}} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{\mathrm{T}}$$

即

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2$$

(2) 考虑

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{x}^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{y}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{y} \partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{y}^2} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^2$$

$$\left[\frac{\partial (F_{x_1}, F_{x_2}, \cdots, F_{x_n})}{\partial (x_1, x_2, \cdots, x_n)}\right]^{\mathrm{T}} = \left[\frac{\partial (F_{x_1}, F_{x_2}, \cdots, F_{x_n})}{\partial (y_1, y_2, \cdots, y_n)} \boldsymbol{A}\right]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \frac{\partial (F_{y_1}, F_{y_2}, \cdots, F_{y_n})}{\partial (y_1, y_2, \cdots, y_n)} \boldsymbol{A}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

记 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\partial(F_{x_1},F_{x_2},\cdots,F_{x_n})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$, $\boldsymbol{C}=\dfrac{\partial(F_{y_1},F_{y_2},\cdots,F_{y_n})}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}$, 由线性代数的知识可知

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$$

注: 另证:

(1) 考虑

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_j},\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_j}=\delta_{ik}$$

(其中 δ_{ik} 是 kronecker 符号)

$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^2$$

(2) 考虑

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\frac{\partial f}{\partial y_j},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}=\sum_{j=1}^{n}a_{jj}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\frac{\partial^2 f}{\partial y_j\partial y_k}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}=\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}a_{ji}a_{kj}\frac{\partial^2 f}{\partial y_j\partial y_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}$$

得证. □

7. 解答: (1)(2) 问是第 (3) 问的特例, 直接计算即可, 我们直接推第 (3) 问. 考虑

$$\det J_n=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial r} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\theta_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial\theta_1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\theta_{n-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\theta_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial\theta_{n-1}}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cdots & \cdots & \prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k\\ -r\sin\theta_1 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & \cdots & \prod\limits_{j=1}^{n-2}\sin\theta_j\cos\theta_1\cos\theta_{n-1} & r\cos\theta_1\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & r\prod\limits_{k=1}^{n-3}\sin\theta_k\prod\limits_{k=n-2}^{n-1}\cos\theta_k & r\prod\limits_{k=1,k\neq n-2}^{n-1}\sin\theta_{n-2}\\ 0 & \cdots & \cdots & -r\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k & \prod\limits_{k=1}^{n-2}\sin\theta_k\cos\theta_{n-1}\end{vmatrix}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(进行恒等变换，提出公因式，运用倍加性质)

$$
\begin{aligned}
&= r^{n-1}\begin{vmatrix}
\cos\theta_1 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cdots & \cdots & \prod_{k=1}^{n}\sin\theta_k \\
0 & (\cos\theta_1)^{-1}\cos\theta_2 & \cdots & \prod_{j=1}^{n-2}\sin\theta_j & \prod_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & r\prod_{k=1}^{n-3}\sin\theta_k \prod_{k=n-2}^{n-1}\cos\theta_k & r\prod_{k=1,k\neq n-2}^{n-1}\sin\theta_{n-2} \\
0 & \cdots & \cdots & -r\prod_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k & \prod_{k=1}^{n-2}\sin\theta_k\cos\theta_{n-1}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

对行列式按第一列展开, 就得到递归公式

$$\det J_n = r\prod_{k=1}^{n-2}\sin\theta_k \det J_{n-1}$$

则容易归纳得到

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}$$

注: (1) 菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第三卷 P329 12 未用归纳十分巧妙地计算出了本题的结果. 不同的方法也可参看徐森林下册 P123 第 501 题.

(2) 本题结果是计算 n 维球体积的有力工具.

下面可以来计算 n 维球 $B_n: x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 的体积:

利用本题结论, 进行 n 维球面坐标变换后 B_n 对应区域为

$$D_n=\{(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2},\varphi_{n-1})\,|0\leqslant r\leqslant R, 0\leqslant\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-2}\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi\}$$

从而有

$$
\begin{aligned}
V_n &= \int_{B_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_{D_n} r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^R r^{n-1}\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin^{n-2}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\cdots\int_0^\pi\sin^2\varphi_{n-3}\mathrm{d}\varphi_{n-3}\int_0^\pi\sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{n-1}.
\end{aligned}
$$

由于当 k 为正整数时有

$$\int_0^\pi\sin^{k-1}\varphi\mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k-1}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

由 Wallis 公式就可得到

$$V_n=\begin{cases}\dfrac{R^{2m}}{m!}\pi^m, & n=2m\\ \dfrac{2R^{2m+1}}{(2m+1)!!}(2\pi)^m, & n=2m+1\end{cases}$$

或利用 Γ 函数统一表示为

$$V_n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n$$ □

8. 解答:

(1) 考虑

$$\begin{aligned}\delta&=\frac{\Delta f(x;h)}{f}\approx\frac{\mathrm{d}(f_1\cdot f_2\cdots f_n)h}{f}\\&=\frac{(\mathrm{d}f_1)\cdot f_2\cdots f_n\cdot h}{f}+\frac{f_1\cdot(\mathrm{d}f_2)\cdots f_n\cdot h}{f}+\cdots+\frac{f_1\cdot f_2\cdots(\mathrm{d}f_n)\cdot h}{f}\\&=\frac{\mathrm{d}f_1\cdot h}{f_1}+\frac{\mathrm{d}f_2\cdot h}{f_2}+\cdots+\frac{\mathrm{d}f_n\cdot h}{f_n}\approx\sum_{i=1}^n\delta_i\end{aligned}$$

(2) 考虑

$$\delta\approx\frac{\mathrm{d}f}{f}\cdot h=\mathrm{d}\ln f\cdot h=\mathrm{d}\sum_{i=1}^n\ln f_i\cdot h=\frac{\mathrm{d}f_1\cdot h}{f_1}+\frac{\mathrm{d}f_2\cdot h}{f_2}+\cdots+\frac{\mathrm{d}f_n\cdot h}{f_n}\approx\sum_{i=1}^n\delta_i$$

再考虑

$$\ln\frac{f_1f_2\cdots f_n}{g_1g_2\cdots g_n}\xlongequal{def}\ln u=\sum_{i=1}^n\ln f_i-\sum_{i=1}^n\ln g_i$$

$$\delta(u;h)\approx\frac{\mathrm{d}u}{u}\cdot h=\mathrm{d}\ln u\cdot h=\mathrm{d}\left[\sum_{i=1}^n\ln f_i-\sum_{i=1}^n\ln g_i\right]\cdot h=\left[\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}f_i\cdot h}{f_i}-\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}g_i\cdot h}{g_i}\right]$$

又因为 g_i 与 $-g_i$ 的相对误差是相同的, 即

$$\left|\frac{\Delta(-g_i)}{-g_i}\right|=\left|\frac{\Delta g_i}{g_i}\right|$$

因此

$$\delta u\approx\sum_{i=1}^n\delta f_i+\sum_{i=1}^n\delta g_i$$

证毕. □

9. 解答: 先证明一个引理 (Perron 定理), 矩阵方法的证明可参见许以超《线性代数与矩阵论》定理 13.1.6, 泛函方法的证明可在张恭庆《泛函分析讲义》上找到 (习题 1.5.5).

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

引理: 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 若 $a_{ij}\geqslant 0, i,j=1,2,\cdots,n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 有非负特征值 $\lambda\geqslant 0$ 且有 (每个分量非负的) 实特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$.

证: 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义点集 (这是个单形)

$$S=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^{n}x_i=1\right\}$$

则 S 为凸紧集. 若存在 $x_0\in S$ 使得 $\boldsymbol{A}x_0=0$; 则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0, x_0 为对应的特征向量. 否则, 在 S 上定义映射

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i}$$

则 $\boldsymbol{f}(S)\subset S$, 由 Brouwer 不动点定理 (谢惠民下册 P329, 证明一般形式的 Brouwer 不动点定理需要拓扑工具, 如同调群) 即得到所要的特征值和特征向量.

往证本题: 由引理 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有非负特征值 $\lambda\geqslant 0$ 且有 (每个分量非负的) 实特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$. 即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

令 $y(t)=\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t)+\cdots+\alpha_nx_n(t)$, 则有

$$y'(t)=\alpha_1x_1'(t)+\alpha_2x_2'(t)+\cdots+\alpha_nx_n'(t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\\\vdots\\x_n'(t)\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}=\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}=\lambda y(t)$$

解微分方程 $y'(t)=\lambda y(t)$ 得 $y(t)=Ce^{\lambda t}$. 令 $t\to+\infty$, 由 $y(t)$ 的定义知 $y(t)\to 0$. 而当 $\lambda>0$ 时 $y(t)\to\infty$, 故只能 $\lambda=0$, 则 $y(t)=C\to 0\Rightarrow C=0\Rightarrow y(t)\equiv 0$. 又先前取出的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 不全为 0, 因此 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 必定是线性相关的. □

10. 解答: 不失一般性, 设 $j=1$. 设 A_i 是 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 中的第 $(1,i)$ 个元素的代数余子式. 记 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\det(\partial_1\boldsymbol{f},\partial_2\boldsymbol{f},\cdots,\partial_n\boldsymbol{f})$, 再记 $\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}}$ 表示去掉该列, 则 $A_i=(-1)^{i+1}\det\left(\partial_1\boldsymbol{g},\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)$, 其中

$$\partial_i\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_i}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \partial_i\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_i} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_i}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

定义 $a_{ij}=(-1)^{i+j}\det\left(\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\partial_1\boldsymbol{g},\cdots,\widehat{\partial_j\boldsymbol{g}},\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)$, 由于 $\boldsymbol{f}$ 是 C^2 映射, 即二

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

阶偏导数可换序, 自然有 $a_{ij}=a_{ji}$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=&\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left(\sum_{j<i}\det\left(\partial_1\boldsymbol{g},\cdots,\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\right.\\&\left.+\sum_{j>i}\det\left(\partial_1\boldsymbol{g}\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\right)\\=&\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left(\sum_{j<i}(-1)^{j-1}\det\left(\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\partial_1\boldsymbol{g}\cdots,\widehat{\partial_j\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_j\boldsymbol{g},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\right.\\&\left.+\sum_{j>i}(-1)^{j-2}\det\left(\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\partial_1\boldsymbol{g}\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\widehat{\partial_j\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\right)\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}(-1)^{i+j}\det\left(\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\partial_1\boldsymbol{g}\cdots,\widehat{\partial_j\boldsymbol{g}},\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\\&-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}(-1)^{i+j}\det\left(\partial_i\partial_j\boldsymbol{g},\partial_1\boldsymbol{g}\cdots,\widehat{\partial_i\boldsymbol{g}},\cdots,\widehat{\partial_j\boldsymbol{g}}\cdots,\partial_n\boldsymbol{g}\right)\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}a_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}a_{ji}=0\end{aligned}$$

注: 依借第二十六章场论的知识, 再给出一个纯分析方法的证明:
任取 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 定义 $\mathbb{R}^n$ 中的向量场

$$\boldsymbol{P}=(A_{1j}(\boldsymbol{x}),A_{2j}(\boldsymbol{x}),\cdots,A_{nj}(\boldsymbol{x}))$$

任取 $r>0$, 由散度定理 (26.5) 有

$$\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_{B_r}\mathrm{div}\boldsymbol{P}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{B_r}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

故

$$\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

而 $\boldsymbol{f}\in C^2$, 故 $\dfrac{\partial A_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\in C$, 由积分中值定理有

$$\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}dS=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(\boldsymbol{0})}{\partial x_i}$$

另一方面有

$$\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{r}\mathrm{d}S=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_iA_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_iA_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_i\left[A_{ij}(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\boldsymbol{0})\right]\mathrm{d}S+\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_iA_{ij}(\boldsymbol{0})\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_i\left[A_{ij}(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\boldsymbol{0})\right]\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}x_iA_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S\right|\leqslant&\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\left|A_j(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\boldsymbol{0})\right|\mathrm{d}S\\
\leqslant&\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|A_{ij}(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\boldsymbol{0})\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\partial B_r}r\left[\sum_{i=1}^{n}\left|A_{ij}(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\boldsymbol{0})\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{\omega_n r^{n}}\int_{\partial B_r}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|A_{ij}(\boldsymbol{x})-A_{ij}(\boldsymbol{0})\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}S\\
\to&\left[\sum_{i=1}^{n}\left|A_{ij}(\boldsymbol{0})-A_{ij}(\boldsymbol{0})\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=0(r\to0^+)
\end{aligned}$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(\boldsymbol{0})}{\partial x_i}=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$$

对于 $\forall\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$, 我们定义 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0)$, 则 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\in C^2$, 且

$$\frac{\partial g_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=\frac{\partial f_j\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0\right)}{\partial x_i}$$

记此时的代数余子式为 B_{ij}, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B_{ij}(\boldsymbol{0})}{\partial x_i}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}\left(\boldsymbol{x}_0\right)}{\partial x_i}=0$$

由 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性, 命题得证. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第二十章 隐函数存在定理与隐函数求导

§20.1.3 思考题 学员: d39

1. 解答: 不矛盾. 隐函数存在定理仅是充分条件, 非必要条件. □

2. 解答: 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz$, 易验证它满足命题 20.1.1 的三个条件, 则隐函数 $z(x,y)$ 可唯一确定.

(1)

$$z_x(1,1)=-\left.\frac{F_x}{F_z}\right|_{(1,1)}=-\left.\frac{2x-3yz}{2z-3xy}\right|_{(1,1)}=-1$$

(2)

$$y_x(1,1)=-\left.\frac{F_x}{F_y}\right|_{(1,1)}=-\left.\frac{2x-3yz}{2y-3xz}\right|_{(1,1)}=-1$$ □

§20.1.4 练习题 学员: d39

1. 解答:

(1) 令 $F(x,y)=\ln(x^2+y^2)-\arctan\dfrac{y}{x}$, 计算得

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{2x+y}{x-2y},\quad y''=\frac{1}{F_y^3}\left(2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}-F_y^2F_{xx}\right)=\frac{10(x^2+y^2)}{(x-2y)^3}$$

(2) 两边取对数得到 $y\ln x=x\ln y$, 对 x 求导得到

$$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+x\cdot\frac{y'}{y}$$

解得

$$y'=\frac{\ln y-y/x}{\ln x-x/y}=\frac{y^2(\ln y-1)}{x^2(\ln x-1)}$$

再令 $F(x,y)=x^y-y^x$, 计算得

$$\begin{aligned}y''&=\frac{1}{F_y^3}\left(2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}-F_y^2F_{xx}\right)\\&=-\frac{2y^2(\ln x-1)}{x^3(\ln y-1)}+\frac{y^2}{x^3(\ln y-1)}+\frac{2y^3(\ln x-1)^2}{x^4(\ln y-1)^2}-\frac{y^3(\ln x-1)^2}{x^4(\ln y-1)^3}\end{aligned}$$

(3) 令 $F(x,y)=xy-2^x\ln 2+2^y$, 计算得

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{2^x(\ln 2)^2-y}{x+2^y\ln 2}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$y''=\frac{1}{F_y^3}\left(2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}-F_y^2F_{xx}\right)$$
$$=\frac{1}{x+2^y\ln 2}\left[2^x\ln^3 2-\frac{2^x\ln^2 2-y}{x+2^y\ln 2}\cdot\left(2+2^y\ln^2 2\right)\right]$$

注: 本类题均有两种通用解法: (i) 方程两边求导解方程; (2) 直接利用求导公式. □

2. 解答:

(1) 两边对 x 求导得 $3y^2\cdot y'+y'-2x=0\Rightarrow y'=\dfrac{2x}{1+3y^2}\Rightarrow y'(0)=0$;

(2) 两边对 x 求导得 $x^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0\Rightarrow y'=-(x/y)^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow y'(1)=\sqrt{3}$;

(3) 两边对 x 求导得 $\cos x-2\sin y\cdot y'=0\Rightarrow y'=\dfrac{\cos x}{2\sin y}\Rightarrow y'(\pi/2)=0$; 再求导得

$$-\sin x-2\cos y\cdot y'-2\sin y\cdot y''=0\Rightarrow y''=\frac{1}{2\sin y}(-\sin x--2\cos y\cdot y')$$

得 $y''(\pi/2)=1/2$. □

3. 解答:

(1) 两边对 x 求偏导得

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}=-e^{-(x+y+z)}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

同理可知 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-1$, 从而 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

(2) 两边对 x 求偏导得

$$0=3x^2+3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=(3x^2-3yz)+(3z^2-3xy)\frac{\partial z}{\partial x}$$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2-yz}{z^2-xy}\Rightarrow\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,2)}=-\dfrac{1}{3}$, 对偶地, 有 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,2)}=-\dfrac{1}{3}$;

(3) 令

$$F(x,y,z)=\sqrt{x^2-y^2}\tan\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}-z$$

则可计算得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{xz}{x^2-y^2},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{yz}{x^2-y^2}$$

(在化简过程中注意用题设等式 $\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=\tan\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$ 代换)

注: 更详细的过程参见《吉米多维奇学习指引》第三册 P44 习题 3386.

(4) 两边对 x 求偏导得

$$\frac{z-xz_x}{z^2}=\frac{z_x}{z}\Rightarrow z_x=\frac{z}{x+z}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

两边对 y 求偏导得

$$-\frac{xz_y}{z^2}=\frac{z_y}{z}-\frac{1}{y}\Rightarrow z_y=\frac{z^2}{y(x+z)}$$

从而

$$\mathrm{d}z=\frac{z}{x+z}\mathrm{d}x+\frac{z^2}{y(x+z)}\mathrm{d}y$$

(5) 两边对 x 求偏导得

$$y+yz_x+z_xx+z=0\Rightarrow z_x=-\frac{y+z}{x+y} \tag{1}$$

再对 x 求偏导得

$$yz_{xx}+z_{xx}x+z_x+z_x=0\Rightarrow z_{xx}=-\frac{2z_x}{x+y}=2\frac{y+z}{(x+y)^2}$$

对偶地, 有

$$z_y=-\frac{x+z}{x+y},\quad z_{yy}=2\frac{x+z}{(x+y)^2}$$

对 (1) 式两边求 y 的偏导有

$$1+z_x+yz_{xy}+z_{xy}x+z_y=0\Rightarrow z_{xy}=-\frac{1+z_x+z_y}{x+y}=\frac{2z}{x+y}$$ □

4. 解答:

(1) 记 $u=x+y+z,v=x^2+y^2+z^2$. 原式两边对 x 求偏导得

$$f_u\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+f_v\left(2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2xf_v+f_u}{2zf_v+f_u}$, 对偶地, 有 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2yf_v+f_u}{2zf_v+f_u}$, 因此

$$\mathrm{d}z=-\frac{2xf_v+f_u}{2zf_v+f_u}\mathrm{d}x-\frac{2yf_v+f_u}{2zf_v+f_u}\mathrm{d}z$$

(2) 记 $u=x,v=x+y,w=x+y+z$. 原式两边对 x 求偏导得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}+1\right)f_w+f_v+f_u=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_u+f_v+f_w}{f_w}$$

原式两边对 y 求偏导得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}+1\right)f_w+f_v=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_v+f_w}{f_w}$$

(3) 令 $u=x+y,v=y+z,w=z+x$, 原式两边对 x 求偏导得

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$f_u + f_v z_x + f_w(z_x + 1) = 0$$

解得 $z_x = -\dfrac{f_u + f_w}{f_v + f_w}$. 再对 x 求偏导即得

$$\begin{aligned} z_{xx} &= -\frac{(f_u + f_w)_x(f_v + f_w) + (f_v + f_w)_x(f_u + f_w)}{(f_v + f_w)^2} \\ &= -\frac{[f_{uu} + f_{ww}(z_x + 1)](f_v + f_w) + [(f_{vv}z_x + f_{ww}(z_x + 1)](f_u + f_w)}{(f_v + f_w)^2} \end{aligned}$$

原式两边对 y 求偏导得

$$f_u + f_v(1 + z_y) + f_w z_y = 0$$

解得 $z_y = -\dfrac{f_u + f_v}{f_v + f_w}$. 再对 y 和 x 分别求偏导得

$$\begin{aligned} z_{yy} &= -\frac{(f_u + f_v)_y(f_v + f_w) + (f_v + f_w)_y(f_u + f_v)}{(f_v + f_w)^2} \\ &= -\frac{[f_{uu} + f_{vv}(1 + z_y)](f_v + f_w) + [f_{vv}(1 + z_y) + f_{ww}z_y](f_u + f_v)}{(f_v + f_w)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{yx} = z_{xy} &= -\frac{(f_u + f_v)_x(f_v + f_w) + (f_v + f_w)_x(f_u + f_v)}{(f_v + f_w)^2} \\ &= -\frac{(f_{uu} + f_{vv}z_x)(f_v + f_w) + [f_{vv}z_x + f_{ww}(z_x + 1)](f_u + f_v)}{(f_v + f_w)^2} \end{aligned}$$

最后代入 z_x, z_y 的值即得结论. □

5. 解答:

(1) 令 $u = xy, v = z - 2x$. 在原方程两边对 x 和 y 分别求偏导得

$$\begin{cases} F_u y + F_v(z_x - 2) = 0 \\ F_u x + F_v z_y = 0 \end{cases}$$

由 $\begin{pmatrix} F_u \\ F_v \end{pmatrix}$ 非零可知系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} y & z_x - 2 \\ x & z_y \end{vmatrix} = 0$$

即 $xz_x - yz_y = 2x$.

(2) 由于

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$$

故有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}$$

同法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-y^2+z^2-zf'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz-yf'\left(\frac{z}{y}\right)}$$

于是

$$\begin{aligned}&\left(x^2-y^2-z^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}\\=&\frac{2xy\left(y^2+z^2-x^2\right)+2xy\left(x^2-y^2+z^2-zf'\right)}{y\left(2z-f'\right)}\\=&\frac{2xyz\left(2z-f'\right)}{y\left(2z-f'\right)}=2xz\end{aligned}$$

本题获证.

(3) 令 $t=\dfrac{x}{z},u=\dfrac{y}{z}$, 则

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{1}{z}-\frac{xz_x}{z^2}\quad(1)\qquad\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{z^2}\cdot z_y\quad(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}-\frac{yz_y}{z^2}\quad(3)\qquad\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{z^2}\cdot z_x\quad(4)$$

又 $t=\varphi(u)$, 得

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\quad(5)\qquad\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\quad(6)$$

(1)(4)(5) 导出

$$\varphi'(u)=\frac{z-xz_x}{z^2}\Big/\frac{-yz_x}{z^2}=\frac{xz_x-z}{yz_x}\tag{7}$$

(2)(3)(6) 导出

$$\varphi'(u)=\frac{-xz_y}{z^2}\Big/\frac{z-yz_y}{z^2}=\frac{xz_y}{yz_y-z}\tag{8}$$

联立 (7)(8) 化简得

$$z=yz_y+xz_x\tag{9}$$

在 (9) 式两边分别对 x 和 y 求偏导得

$$\begin{cases}z_x=yz_{xy}+z_x+xz_{xx}\\z_y=z_y+yz_{yy}+xz_{xy}\end{cases}\iff\begin{pmatrix}z_{xx}&z_{xy}\\z_{xy}&z_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

该方程组有非零解, 因此系数矩阵的行列式为 0, 即 $z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0$. 得证.

(4) 在原方程两边分别对 x,y,z 求偏导得

$$\frac{2x}{a^2+u}-Au_x=0,\quad \frac{2y}{b^2+u}-Au_y=0,\quad \frac{2z}{c^2+u}-Au_z=0$$

其中

$$A=\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}$$

可发现

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=\frac{4}{A},\quad xu_x+yu_y+zu_z=\frac{2}{A}$$

命题显然得证. □

§20.2.2 思考题　学员: d39

1. 解答: 条件应为:

(i)F,G,H 对各变元有连续偏导数;

(ii)$F=G=H=0$ 有解 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0,z_0,u_0)$;

(iii)$\left.\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}\right|_{p_0}\neq 0.$ □

2. 解答: 计算得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r^2$$

因此在 $r\neq 0$ 的点的附近可存在反函数. 但这并不是充要条件, 当 $r=0$ 时, 也可以存在反函数. 例如 $y=x$, 此时 $r=\sqrt{2}x,\theta=\dfrac{\pi}{4}$, 在 $(r_0,\theta_0)=\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 附近存在反函数 $x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$.

注: 直观解释就是在极坐标系中如果一个距离 r 只对应一个角度 θ, 则可确立反函数, 否则不可以. 这相当于复变函数论中的单值函数与多值函数. □

§20.2.5 练习题　学员: d39

1. 解答: 令 $F=e^v+u^3-x, G=e^u-v^3-y$, 则 $J=\begin{vmatrix}3u^2 & e^v\\ e^u & -3v^2\end{vmatrix}=-9u^2v^2-e^{u+v}$, 而

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix}-1 & e^v\\ 0 & -3v^2\end{vmatrix}=3v^2,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=\begin{vmatrix}0 & e^v\\ -1 & -3v^2\end{vmatrix}=e^v$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{3v^2}{9u^2v^2-e^{u+v}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{e^v}{9u^2v^2-e^{u+v}}$$ □

2. 解答: 对 z 求偏导数得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial z}+\dfrac{\partial y}{\partial z}+1=0\\ 2x\dfrac{\partial x}{\partial z}+2y\dfrac{\partial y}{\partial z}+2z=0\end{cases}$$

联立求解得

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{y-z}{x-y},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{z-x}{x-y}$$

从而 $\left.\dfrac{\partial x}{\partial z}\right|_{(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)}=\dfrac{1}{2},\left.\dfrac{\partial y}{\partial z}\right|_{(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)}=\dfrac{1}{2}.$ □

3. 解答: 对 x 求偏导数得

$$\begin{cases}x^2+y^2\dfrac{\partial y}{\partial x}+z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}=yz+xz\dfrac{\partial y}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}\\ 1+\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\end{cases}$$

联立求解得

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{z-x}{y-z},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-y}{y-z}$$

上面两式对 x 求偏导数并代入上面两式化简得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(z-y)^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(y-z)^3}$$ □

4. 解答: 令 $F=u\cos\dfrac{v}{u}-x, G=\sin\dfrac{v}{u}-y$, 则

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & -\sin\dfrac{v}{u}\\ -\dfrac{v}{u^2}\cos\dfrac{v}{u} & \dfrac{1}{u}\cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=\frac{1}{u}\cos^2\frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix}-1 & -\sin\dfrac{v}{u}\\ 0 & \dfrac{1}{u}\cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=-\frac{1}{u}\cos\frac{v}{u},\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=\begin{vmatrix}0 & -\sin\dfrac{v}{u}\\ -1 & \dfrac{1}{u}\cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=-\sin\frac{v}{u}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & -1\\ -\dfrac{v}{u^2}\cos\dfrac{v}{u} & 0\end{vmatrix}=-\frac{v}{u^2}\cos\frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & 0\\ -\dfrac{v}{u^2}\cos\dfrac{v}{u} & -1\end{vmatrix}=-\cos\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\frac{1}{\cos(v/u)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{u\sin(v/u)}{\cos^2(v/u)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\frac{v}{u\cos(v/u)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-J^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{u}{\cos(v/u)}-\frac{v\sin(v/u)}{\cos^2(v/u)}$$

注: 本题疑似遗漏一个 u 导致结果略显复杂, 可对比吉米多维奇第五册 3415 题. □

5. 解答: 微分得

$$\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)f \tag{1}$$

$$0=g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y+g_z\mathrm{d}z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)g \tag{2}$$

$$0=h_x\mathrm{d}x+h_y\mathrm{d}y+h_z\mathrm{d}z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)h \tag{3}$$

令 $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}=I_1,\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}=I_2,\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}=I_3$, 由 (2)(3) 解得

$$\mathrm{d}y=\frac{I_2}{I_1}\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}z=\frac{I_3}{I_1}\mathrm{d}x$$

将 $\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 代入 (1) 得

$$\mathrm{d}u=f_x\mathrm{d}x+f_y\cdot\frac{I_2}{I_1}\mathrm{d}x+f_z\cdot\frac{I_3}{I_1}\mathrm{d}x=\frac{1}{I_1}\left(I_1f_x+I_2f_y+I_3f_z\right)\mathrm{d}x=\frac{I}{I_1}\mathrm{d}x$$

其中 $I=\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)}$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{I}{I_1}$$

对 (1)(2)(3) 式再求一次微分, 得 (注意 u 只和 x 有关, 对 y 和 z 求偏导为 0, 并利用链式法则)

$$\mathrm{d}^2u=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2f+f_y\mathrm{d}^2y+f_z\mathrm{d}^2z \tag{4}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$0=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g+g_y\mathrm{d}^2y+g_z\mathrm{d}^2z \qquad (5)$$

$$0=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h+h_y\mathrm{d}^2y+h_z\mathrm{d}^2z \qquad (6)$$

$$\mathrm{d}^2y=\frac{1}{I_1}\left[g_z\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h-h_z\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\partial z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\right]$$

$$\mathrm{d}^2z=\frac{1}{I_1}\left[h_y\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g-g_y\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\partial z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right]$$

令 $\dfrac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}=I_4,\dfrac{\partial(f,z)}{\partial(y,z)}=I_5$, 并将 d^2y 及 d^2z 代入 (4), 即得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u=&\frac{1}{I_1}\left[I_1\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f\right.\\&+I_4\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\\&\left.+I_5\cdot\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right]\end{aligned}$$

再以 $\mathrm{d}y=\dfrac{I_2}{I_1}\mathrm{d}x$ 及 $\mathrm{d}z=\dfrac{I_3}{I_1}\mathrm{d}x$ 代入上式, 即得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=&\frac{1}{I_1^3}\left[I_1\cdot\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f\right.\\&+I_4\cdot\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\\&\left.+I_5\cdot\left(I_2\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right]\end{aligned}$$

注:《吉米多维奇学习指引》第 3416 题用线性方程组和行列式来表述更清晰. □

6. 解答: 计算可知

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\cos v\mathrm{d}u-u\sin v\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}y=\sin v\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v\end{cases}$$

联立求解, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\cos v\mathrm{d}x+\sin v\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}v&=\frac{1}{u}(-\sin v\mathrm{d}x+\cos v\mathrm{d}y)\\ u\mathrm{d}v&=-\sin y\mathrm{d}x+\cos v\mathrm{d}y\end{aligned}$$

再对上式微分一次, 得

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$u\mathrm{d}^2v+\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-\cos v\mathrm{d}v\mathrm{d}x-\sin v\mathrm{d}v\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2z=\mathrm{d}^2v&=-\frac{2}{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=-\frac{2}{u^2}(\cos v\mathrm{d}x+\sin v\mathrm{d}y)(-\sin v\mathrm{d}x+\cos v\mathrm{d}y)\\&=\frac{2}{u^2}\left(\sin v\cos v\mathrm{d}x^2-\cos 2v\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\sin v\cos v\mathrm{d}y^2\right)\end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=\frac{2\sin v\cos v}{u^2}=\frac{\sin 2v}{u^2}$$
$$-\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2},\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}$$

注: 本题也可消去 u,v, 由 $z=v=\arctan\dfrac{y}{x}$ 获解. □

7. 解答: 计算得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x|_{(u,v)=(0,0)}=e^{u+v}(\mathrm{d}u+\mathrm{d}v)\Big|_{(u,v)=(0,0)}=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\\\mathrm{d}y|_{(u,v)=(0,0)}=e^{u-v}(\mathrm{d}u-\mathrm{d}v)\Big|_{(u,v)=(0.0)}=\mathrm{d}u-\mathrm{d}v\end{cases}$$

可解出

$$\begin{cases}\mathrm{d}u|_{(u,v)=(0,0)}=\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{2}\\\mathrm{d}v|_{(u,v)=(0,0)}=\dfrac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{2}\end{cases}$$

从而当 $(u,v)=(0,0)$ 时

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u=0\\\mathrm{d}^2z&=u\mathrm{d}^2v+2\mathrm{d}u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}^2u=2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=2\left(\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2\right)\end{aligned}$$ □

8. 解答: g 对 x 求偏导得

$$g_1\cdot 2x+g_2\cdot e^y\cos x+g_3\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{g_3}(g_1\cdot 2x+g^2\cdot e^y\cos x)$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=f_x+f_y\cos x--\frac{f_z}{g_3}(g_1\cdot 2x+g^2\cdot e^y\cos x)$$ □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§20.3.3 练习题 学员: d39

1. 解答: 由

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial x}{\partial z}\mathrm{d}z\Rightarrow \mathrm{d}z=\frac{1}{\partial x/\partial z}\mathrm{d}x-\frac{\partial x/\partial y}{\partial x/\partial z}\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\partial x/\partial z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial x/\partial y}{\partial x/\partial z}$$

代入原方程得

$$(x-y)\cdot\frac{1}{\partial x/\partial z}-y\cdot\frac{\partial x/\partial y}{\partial x/\partial z}=0$$

即

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-y}{y}$$

□

2. 解答: 由 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 两边微分, 得

$$\mathrm{d}r=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\mathrm{d}y\Longleftrightarrow r\mathrm{d}r=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$$

由 $\varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$ 两边微分, 得

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{x}{r^2}\mathrm{d}y-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}x\Longleftrightarrow r^2\mathrm{d}\varphi=x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

于是

$$\begin{aligned}x\mathrm{d}r-yr^2\mathrm{d}\varphi&=\left(x^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y\right)-\left(xy\mathrm{d}y-y^2\mathrm{d}x\right)\\&=\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x=r^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{d}x=\frac{x}{r}\mathrm{d}r-y\mathrm{d}\varphi \tag{1}$$

同理可得

$$\mathrm{d}y=\frac{y}{r}\mathrm{d}r+x\mathrm{d}\varphi \tag{2}$$

由 (1)(2) 可得

$$\begin{aligned}x\mathrm{d}^2y-y\mathrm{d}^2x=&x\left(\frac{y}{r}\mathrm{d}^2r-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}r^2+\frac{1}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi+x\mathrm{d}^2\varphi\right)\\&-y\left(\frac{x}{r}\mathrm{d}^2r-\frac{x}{r^2}\mathrm{d}r^2+\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}r-\mathrm{d}y\mathrm{d}\varphi-y\mathrm{d}^2\varphi\right)\\=&\mathrm{d}r/r(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)+(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\mathrm{d}\varphi+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}^2\varphi\\=&\frac{\mathrm{d}r}{r}\left(r^2\mathrm{d}\varphi\right)+(r\mathrm{d}r)\mathrm{d}\varphi+r^2\mathrm{d}^2\varphi\\=&2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi+r^2\mathrm{d}^2\varphi\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

于是

$$w = x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right).$$ □

3. 解答: 易知

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial x} = 1, \frac{\partial\eta}{\partial y} = -1$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial\xi} + \frac{\partial z}{\partial\eta}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial\xi} - \frac{\partial z}{\partial\eta}$$

代入原方程得

$$\frac{\partial z}{\partial\xi} + \frac{\partial z}{\partial\eta} = \frac{\partial z}{\partial\xi} - \frac{\partial z}{\partial\eta} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial\eta} = 0$$

即

$$z = \varphi(\xi) = \varphi(x+y)$$

其中 φ 为任意的函数. □

4. 解答: 易见

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\mathrm{d}y + e^{-x}\mathrm{d}z - ze^{-x}\mathrm{d}x\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\left(\mathrm{d}x + e^{-y}\mathrm{d}z - ze^{-z}\mathrm{d}y\right)$$

于是

$$\left(1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial u} - e^{-z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial z}{\partial v} - ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial u} - ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial v} - ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial u} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial u} - ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial u} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}$$

代入原式化简整理得

$$F = \frac{e^{x+y} - z^2}{1 - e^{-x}\dfrac{\partial z}{\partial u} - e^{-y}\dfrac{\partial z}{\partial v}}$$ □

5. 解答: 计算可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}w = e^z(1+z)\mathrm{d}z &= \frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v \\ &= \frac{\partial w}{\partial u}\left(e^z\mathrm{d}x + xe^z\mathrm{d}z\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(e^z\mathrm{d}y + ye^z\mathrm{d}z\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(1 + z - x\frac{\partial w}{\partial u} - y\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}z = \frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}x + \frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}y$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}}{1+z-x\dfrac{\partial w}{\partial u}-y\dfrac{\partial w}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1+z-x\dfrac{\partial w}{\partial u}-y\dfrac{\partial w}{\partial v}}$$

代入原方程得

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial v}$$

□

6. 解答: 计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}w&=\frac{z\mathrm{d}u-u\mathrm{d}z}{z^2}=\frac{\partial w}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial w}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta+\frac{\partial w}{\partial \zeta}\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{\partial w}{\partial \xi}\left(\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial \eta}\left(\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial \zeta}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

两边同乘 z^2, 整理得

$$z\mathrm{d}u=z\frac{\partial w}{\partial \xi}\mathrm{d}x+z\frac{\partial w}{\partial \eta}\mathrm{d}y+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial \xi}-y\frac{\partial w}{\partial \eta}+z^2\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\mathrm{d}z$$

将由上式确定的 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 代入原方程, 得

$$x\frac{\partial v}{\partial \xi}+y\frac{\partial w}{\partial \eta}+\left(u-x\frac{\partial w}{\partial \xi}-y\frac{\partial w}{\partial \eta}+z^2\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)=u+\frac{xy}{z}$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta}=\frac{xy}{z^3}=\frac{\xi\eta}{\zeta}$$

□

7. 解答: 将球坐标变换视作两个变换

$$(x,y,z)=(R\cos\varphi,R\sin\varphi,z),\quad (R,\varphi,z)=(r\sin\theta,\varphi,r\cos\theta)$$

的复合. 由第一个变换有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2u}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\\=&\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-R\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi+R\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\right)+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\\=&\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\sin^2\varphi+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)\\&+\frac{1}{R}\left(R\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\sin^2\varphi-2R\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+R\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\cos^2\varphi-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\\=&\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

再由第二个变换有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]\\
=&\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial R}\sin\theta+r^2\frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial R}r\cos\theta+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial z}r(-\sin\theta)\right)+\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]\\
=&\frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial u}{\partial R}\sin\theta+2r\frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}\sin^2\theta+2r^2\frac{\partial^2 u}{\partial R\partial z}\sin\theta\cos\theta+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\theta\right)\\
&+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[r\frac{\partial u}{\partial R}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)-2r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}+r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}\cdot r\cos\theta-\frac{\partial^2 u}{\partial R\partial z}r\sin\theta\right)\right.\\
&\left.-r\sin^2\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial R\partial z}r\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(-r\sin\theta)\right)\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\
=&\frac{2\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{2\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial R\partial z}\sin 2\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\theta+\frac{\cos^2\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial R}\\
&-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial R}-\frac{2}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}\cos^2\theta-\frac{\partial^2 u}{\partial R\partial z}2\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\sin^2\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\
=&\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\
=&\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

注: 其他证法参见徐森林上册 P366 第 393 题. □

8. 解答: 计算得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\\
&\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial uzv}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

代入原方程, 整理化简得

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0$$ □

9. 解答: 由 $z=w-(x+y)$ 不难验证

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial v}-1$$

于是

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\&=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\end{aligned}\tag{1}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)\\&=\left(\frac{v}{u}-1\right)\left[-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]=\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\end{aligned}\tag{2}$$

将上述结果代入原方程, 即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$$

将 (1)(2) 式代入本题即获证. □

10. 解答: 由

$$u=x+\frac{y^2}{x},\quad v=y+\frac{x^2}{y}$$

可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1-\frac{y^2}{x^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2x}{y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1-\frac{x^2}{y^2}$$

则

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1-y^2/x^2 & 2y/x\\ 2x/y & 1-x^2/y^2\end{vmatrix}=-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}-2$$

直接代入验证可知 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-\dfrac{uv}{xy}$. □

11. 解答: 直接计算可知

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial u}{\partial z}\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\\&=0\end{aligned}$$

□

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

12. 解答: 直接计算可知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}.$$

于是

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix}=-\frac{2x}{y},\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1}=-\frac{y}{2x}$$

□

13. 解答: 由 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 得 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{r^2-x\cdot 2r\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^4}=\frac{r^2-2x^2}{r^4},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{r^2-2y^2}{r^4},\quad \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{r^2-2z^2}{r^4}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2xy}{r^4}=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{2xz}{r^4}=\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{2yz}{r^4}=\frac{\partial v}{\partial z}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}&=\begin{vmatrix} \frac{r^2-2x^2}{r^4} & -\frac{2xy}{r^4} & -\frac{2xz}{r^4} \\ -\frac{2xy}{r^4} & \frac{r^2-2y^2}{r^4} & -\frac{2yz}{r^4} \\ -\frac{2xz}{r^4} & -\frac{2yz}{r^4} & \frac{r^2-2z^2}{r^4} \end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{r^{12}}\begin{vmatrix} r^2-2x^2 & -2xy & -2xz \\ -2xy & r^2-2y^2 & -2yz \\ -2xz & -2yz & r^2-2z^2 \end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{r^6}\left|\boldsymbol{E}_3-\frac{2}{r^2}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\right|\\ &=\frac{1}{r^6}\left|\boldsymbol{E}_3-\frac{2}{r^2}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right|\\ &=\frac{1}{r^6}(1-\frac{2}{r^2}(x^2+y^2+z^2))=-\frac{1}{r^6}\end{aligned}$$

注: 这里我们应用了线性代数经典结论 $|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|$. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§20.5.2 参考题 学员: d39

第一组参考题 学员: d39

1. 解答: 令

$$F(x,t)=f\left(x,\int_0^t \sin x\mathrm{d}x\right)=f(x,1-\cos t)$$

由题意知

(1)$F(x,t)$ 在 $(0,\pi/2)$ 的邻域内有对 x 和 t 的连续偏导数;

(2)$F(0,\pi/2)=f(0,1)=0$;

(3)$F_t(0,\pi/2)=f_y\sin t(0,\pi/2)=f_y(0,1)\neq 0$.

满足隐函数存在定理的条件, 从而在 $(0,\pi/2)$ 附近可以确定隐函数 $t=\varphi(x)$, 且是惟一确定的, 故由 $f(0,1)=0$ 知当 $x=0$ 时 $t=\pi/2$, 于是

$$\varphi'(0)=t_x(0)=-\left.\frac{F_x}{F_t}\right|_{x=0}=-\left.\frac{f_x}{f_y\sin t}\right|_{x=0}=-\frac{f_x(0,1)}{f_y(0,1)}$$ □

2. 解答: 令 $F(x,y)=y-x-\sin\dfrac{y}{2}$, 则

$$F_y=1-\frac{\cos y}{2}\geqslant\frac{1}{2}>0$$

由命题 20.4.1 可知存在 $(-\infty,+\infty)$ 上隐函数解 $y=y(x)$, 且有

$$y'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{1}{1-1/2\cos y(x)}$$

由 $y(x)$ 可导可知 $y'(x)$ 可导, 而 $y''(x)$ 又只与 $y(x)$ 和 $y'(x)$ 有关, 容易归纳得到 $y(x)$ 无穷次可微. □

3. 解答: 令 $F(x,y)=x-y-\varphi(y)$, 则由题意知

(1) $F(0,0)=\varphi(0)=0$;

(2) 当 $-\infty<x<+\infty,-a<y<a$ 时, $F(x,y)$ 对 x 和 y 有连续偏导数;

(3) $F_y(0,0)=-1-\varphi'(0)<0$, 即 $F_y(0,0)\neq 0$.

满足隐函数存在定理的条件, 从而在 $(0,0)$ 附近 (即存在 $\delta>0$, 当 $-\delta<x<\delta$ 时) 可以确定唯一可微隐函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x=y+\varphi(y)$ 且 $y(0)=0$. □

4. 解答: 注意到当 $x>0$ 及 $y\geqslant 0$ 时有 $F(x,y)>0$, 而当 $x>0,y\to-\infty$ 时 $F(x,y)\to-\infty$, 因此对任意的 $x_0>0$, 存在 y_0 使得 $F(x_0,y_0)=0$.

又注意到 $F_y(x_0,y_0)=-e^{-y_0}(y_0-3)y_0^2$, 而易证 $F(x,0)$ 与 $F(x,3)$ 皆为正, 可知 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$. 则满足隐函数存在定理的所有条件, 由隐函数存在定理, 命题显然获证. □

5. 解答: 由于 $|f_x|<M|f_y|$, 必有 $|f_y|>0$ 恒成立. 而 f_y 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 故 f_y 恒正或恒负 (否则由介值定理矛盾), 不妨设 $f_y>0$. 则已满足隐函数存在定理所有条件, 可确定某个

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

邻域 $U(x_0)$ 上的隐函数 $y=y(x)$ 满足 $f(x,y(x))=0$. 同时由

$$\begin{aligned}0&=f(x,y(x))-f(x_0,y(x_0))\\&=f(x,y(x))-f(x,y(x_0))+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\\&=f_y(x,\theta)(y(x)-y(x_0))+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\end{aligned}$$

(其中 θ 介于 $y(x)$ 和 $y(x_0)$ 之间, 最后一行是在 $x\to x_0$ 时) 从中可解得

$$\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=-\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x,\theta)}+o(1)\to-\frac{f_x}{f_y}\bigg|_{(x_0,y_0)}\quad(x\to x_0)$$

这说明 $y(x)$ 在 x_0 处可微. 事实上, 此处的 $(x_0,y(x_0))$ 是任意的, 因此在邻域 $U(x_0)$ 上 $y(x)$ 都是可微的. 下证 $y(x)$ 可以被延拓到 $\mathbb{R}$ 上. 假设存在 $\beta>x_0$, $y(x)$ 只能在 $[x_0,\beta)$ 上定义, 则由 $|y'(x)|=|f_x/f_y|<M$ 可知 $y(x)$ 在 $[x_0,\beta)$ 上连续 (导函数有界推一致连续推连续), 则 $y(\beta^-)$ 存在, 只要在 β 处补充定义就可延拓 $y(x)$ 至 $[x_0,\beta]$ 上, 与假设矛盾. 因此 $y(x)$ 可从 x_0 处向右一直延拓, 同理可证向左也可以一直延拓, 即 $y(x)$ 可被延拓至 $\mathbb{R}$ 上.

注: (1) 如果去掉 $|f_x|<M|f_y|$ 的条件, 削弱为 $f_y\neq0$, 则只能确定隐函数局部存在, 而不一定能延拓至整体, 可以考虑反例 $f(x,y)=e^y+x^2-1=0$ 满足 $f_y\neq0, f(0,0)=0$ 但在 $x\geqslant1$ 时显然无解.

(2)$f(x_0,y_0)$ 用于确定隐函数的局部存在性, 反例考虑 $f(x,y)=x^2+y^2+1=0$.

(3) 解的延拓是常微分方程中常见的问题, 此处我们只假设 $y(x)$ 仅能在 $[x_0,\beta)$ 上定义, 而不考虑 $[x_0,\beta]$, 这是因为饱和解 (不能再延拓的区间) 一定是开区间, 可参见王高雄 P91. □

6. 解答:

(1) 由于 Jacobi 矩阵秩为 1, 至少有一元非零, 不妨设 $u_x(x_0,y_0)$ 非零, 则此时对 u 用隐函数存在定理, 在 (x_0,y_0) 的邻域 U 上可以确定 $x=x(u,y)$, 并且有 $x_y=-\dfrac{u_y}{u_x}$. 又由于 Jacobi 矩阵秩为 1, 即行列式为 0, 从而 $v_xu_y-u_xv_y=0$, 进而可知

$$g_y(x(u,y),y)=v_xx_y+v_y=-v_x\cdot\frac{u_y}{u_x}+v_y=-\frac{v_xu_y-u_xv_y}{u_x}=0$$

令 $F(f(x,y),g(x,y))=g_y(x(u,v),y)$ 即可.

(2) 对 $F(f(x,y),g(x,y))$ 分别求偏导, 可得

$$F_uu_x+F_vv_x=F_uf_u+F_vv_y=0$$

或写成

$$\begin{pmatrix}u_x&v_x\\u_y&v_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_u\\F_v\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

而 $F_u^2+F_v^2\neq 0$, 即该方程组有非零解, 则系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{\mathrm{T}} = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = 0$$

证毕. □

7. 解答: 显然当 $s=0$ 时 $C\subset E$. 当 $|s|$ 充分小时, 构造隐函数组

$$\begin{cases} F(x,y,s,t)=x-s^2-\dfrac{f'(t)}{\varphi'(t)}s-f(t)=0 \\ G(x,y,s,t)=y-2s-\varphi(t)=0 \end{cases}$$

取一点 $\boldsymbol{P}_0(x_0,y_0,0,t_0)$, 其中 $t_0\in(-1,1), x=f(t_0), y=\varphi(t_0)$. 由题设条件可知

(1)F 和 G 对各变元有连续偏导数;

$$(2)F(\boldsymbol{P}_0)=G(\boldsymbol{P}_0)=0;(3)\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(s,t)}\right|_{\boldsymbol{P}_0}=-f'(t_0)\neq 0.$$

满足隐函数组存在定理的所有条件, 则在 $\boldsymbol{P}_0$ 的邻域内可以确定唯一连续解 $t=t(x,y)$, 又 z 只与 t 有关, 从而得到连续的 $z=z(x,y)$. 注意到 x_0,y_0,t_0 的任意性, 即当 $|s|$ 充分小时这些点组成一张连续曲面. □

8. 解答: 题设条件满足隐函数存在定理, 可以确定唯一 $y=y(x), x\in D$. 下面反证满足题设条件的点有无限个, 注意到 D 是有界闭区域, 故可从中选取一列点 $(x_n,y_n)\in D$ 收敛于 $(x_0,y_0)\in D$, 这些点满足

$$f(x_n,y_n)=g(x_n,y_n)=0$$

当然也有

$$f(x_0,y_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=0,\quad g(x_0,y_0)=\lim_{n\to\infty}g(x_n,y_n)=0$$

再由隐函数定理, 可知在 (x_0,y_0) 的邻域 U 上存在惟一隐函数解 $y_0(x)$ 满足 $y_0=y_0(x_0)$. 但是当 $n\to\infty$ 时, $(x_n,y_n)\in U$, 即在 U 内还有其他隐函数解, 与惟一性矛盾. 命题获证. □

9. 解答:

(1) 由隐函数存在定理可知

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}=(-1)^3\cdot\frac{f_y}{f_z}\cdot\frac{f_x}{f_y}\cdot\frac{f_z}{f_x}=-1$$

注: 几何意义是曲面的切平面与各坐标轴的相交直线斜率乘积为 -1.

(2) 设 $\dfrac{P\cdot V}{T}=R$, 则 $f(P,V,T)=P\cdot V-RT=0$.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

易验证

$$P_V \cdot V_T \cdot T_P = (-1)^3 \cdot \frac{P}{-R} \cdot \frac{V}{P} \cdot \frac{-R}{V} = -1$$

(3) 用 n 元形式的隐函数存在定理, 可知当 $f(x_1, x_2, \cdots; x_n) = 0$ 时有

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = (-1)^n \cdot \frac{f_{x_2}}{f_{x_1}} \cdot \frac{f_{x_3}}{f_{x_2}} \cdots \frac{f_{x_1}}{f_{x_n}} = (-1)^n$$ □

10. 解答: 记 $S = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$, 先证 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S)$ 为开集: 由于 $\mathbb{R}^2$ 是开集, S 是闭集, 故 $\mathbb{R}^2 \backslash S$ 是开集. 由题设知 $\det J\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S) \neq 0$, 据命题 20.4.2 可知 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S)$ 为开集.
再证 $\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$ 是开集, 只需证 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$ 为闭集: 设 $\boldsymbol{y} \in \overline{f(\mathbb{R}^2)}$, 取闭球 $\overline{B_r(\boldsymbol{y})} \supset \boldsymbol{y}$. 显然 $\overline{B_r(\boldsymbol{y})} \cap \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2) \neq \varnothing$, 于是存在 $\{\boldsymbol{z}_n\} \subset \overline{B_r(\boldsymbol{y})} \cap \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{y}$. 由 $\boldsymbol{f}$ 连续可知 $\boldsymbol{f}^{-1}(\overline{B_r(\boldsymbol{y})})$ 是闭集. 再由 $\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2 || \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})| \leqslant M\}$ 是有界集知 $\boldsymbol{f}^{-1}(\overline{B_r(\boldsymbol{y})})$ 是有界集从而是紧集. 由练习题 18.2.5 第 10 题可知 $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1}(\overline{B_r(\boldsymbol{y})})$ 也是紧集 (闭集). 由于 $\{\boldsymbol{z}_n\} \subset \overline{B_r(\boldsymbol{y})} \cap \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$, $\{\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{z}_n)\} \subset \boldsymbol{f}^{-1}(\overline{B_r(\boldsymbol{y})})$, 则 $\{\boldsymbol{z}_n\} = \{\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{z}_n)\} \subset \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1}(\overline{B_r(\boldsymbol{y})})$, 于是

$$\boldsymbol{y} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{z}_n \in \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1}(\overline{B_r(\boldsymbol{y})}) \subset \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$$

这就说明了 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$ 为闭集, 从而 $\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$ 是开集. 下面注意到

$$\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S) \cup (\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)) \supset (\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2) \backslash \boldsymbol{f}(S)) \cup (\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)) = \mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(S)$$

这说明了 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S) \cup (\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2))$ 是 $\mathbb{R}^2$ 挖去至多 r 个点的集合, 从而连通. 又

$$\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S) \cap (\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)) = \varnothing$$

由连通性的定义可知 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2 \backslash S)$ 和 $\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$ 两者之中必有一个是空集, 显然前者非空, 故 $\mathbb{R}^2 \backslash \boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2) = \varnothing$, 即 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. □

11. 解答: 由于 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射且 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 可逆, 故存在 $\delta > 0$, 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 当 $|\boldsymbol{x}| \leqslant \delta$ 时有 (下面都使用矩阵范数)

$$\left\| [J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1} J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{E}_n \right\| \leqslant \frac{1}{2}$$

现在任取 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $|\boldsymbol{x}| \leqslant \delta/2$. 定义映射

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} : \overline{B(\boldsymbol{0}, \delta/2)} &\to \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{z} &\mapsto \boldsymbol{z} - [J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x}] \end{aligned}$$

直接计算 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})$ 的 Jacobi 矩阵知

$$J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{E}_n - [J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1} J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z})$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

注意到 $|x+z| \leqslant |x|+|z| \leqslant \delta$, 故有

$$\|Jg(z)\| \leqslant \frac{1}{2}$$

于是, 对任意的 $z_1, z_2 \in \overline{B(0,\delta/2)}$, 由拟微分平均值定理 (命题 19.4.2) 知存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$|g(z_1)-g(z_2)| \leqslant \|Jg(z_1+\theta(z_2-z_1))\| \cdot |z_1-z_2| \leqslant \frac{1}{2}|z_1-z_2|$$

这说明 g 是一个压缩映射. 并且

$$\begin{aligned}
|g(z)| &= \left\|z-[Jf(x_0)]^{-1}[f(x_0+x+z)-f(x_0)-Jf(x_0)x]\right\| \\
&= \left\|[Jf(x_0)]^{-1}\{Jf(x_0)(x+z)-[f(x_0+x+z)-f(x_0)]\}\right\| \\
&\leqslant \left\|[Jf(x_0)]^{-1}[Jf(x_0)-Jf(x_0+\theta_1(x+z))](x+z)\right\| \\
&\leqslant \left\|E_n-[Jf(x_0)]^{-1}Jf(x_0+\theta_1(x+z))\right\| \cdot |x+z| \leqslant \delta/2
\end{aligned}$$

从而 g 是闭球 $\overline{B(0,\delta/2)}$ 上的压缩映射, 由压缩映像原理 (命题 18.2.5), g 在 $\overline{B(0,\delta/2)}$ 内存在惟一不动点 z, 即有

$$f(x_0+x+z)-f(x_0)-Jf(x_0)x=0$$

又在 x_0 的邻域内 f 可逆, 且 $Jf^{-1}=(Jf)^{-1}$, 在上式两边作用 f^{-1}, 并对 f^{-1} 用无穷小增量公式 (命题 19.4.1) 可得到

$$\begin{aligned}
x_0+x+z &= f^{-1}(f(x_0)+Jf(x_0)x) \\
&= x_0+Jf^{-1}(f(x_0))Jf(x_0)x+o(Jf(x_0)x)
\end{aligned}$$

即

$$x+z=[Jf(x_0)]^{-1}Jf(x_0)x+o(Jf(x_0)x)=x+o(Jf(x_0)x)=o(x)$$

得 $z=o(x)$. □

第二组参考题 学员: d39

1. 解答: 不失一般性, 设 $x_0=0, f(x_0)=0, Jf(x_0)=E_n=(\delta_{ij})$(否则可作仿射变换). 这里 δ_{ij} 为 Kronecker 符号. 选取充分小的 a, 使得开方体

$$C^n(a)=\left\{x\in\mathbb{R}^n \middle| \|x\|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|<a\right\} \subset U$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

且当 $\boldsymbol{x}\in C^n(a)$ 时 $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq 0$ 且 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{E}_n$ 中的元素满足

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{x}_j}-\delta_{ij}\right|\leqslant\frac{1}{2n}$$

令 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}$, 则当 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in C^n(a)$ 时由 Lagrange 中值定理有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2)\|&=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|g_i(\boldsymbol{x}_1)-g_i(\boldsymbol{x}_2)|\}\\&=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\left(\boldsymbol{\xi}^j\right)\left((\boldsymbol{x}_1)_j-(\boldsymbol{x}_2)_j\right)\right|\right\}\\&\leqslant n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left\{\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\left(\boldsymbol{\xi}^j\right)\right|\right\}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|(\boldsymbol{x}_1)_j-(\boldsymbol{x}_2)_j|\}\\&\leqslant n\cdot\frac{1}{2n}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|\end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|&=\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|\\&\geqslant\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|-\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2)\|\\&\geqslant\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|\end{aligned}$$

下面分几步进行:

(1) 如果 $\boldsymbol{y}\in C^n(a/2)$, 则必存在一点 $\boldsymbol{x}\in C^n(a)$, 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$, 为此, 设

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_k),\quad k=0,1,2,\cdots$$

易见

$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-1}\|=\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k-1})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k-2})\|\leqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_{k-1}-\boldsymbol{x}_{k-2}\|$$

这说明 $\boldsymbol{g}$ 是一个压缩映射, 由压缩映像原理知 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛. 设极限为 $\boldsymbol{x}$, 由

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_k\|&=\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0\|\\&\leqslant\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k-1}\|+\|\boldsymbol{x}_{k-1}-\boldsymbol{x}_{k-2}\|+\cdots+\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|\\&\leqslant\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-2}}+\cdots+1\right)\|\boldsymbol{y}\|<2\|\boldsymbol{y}\|<2\cdot\frac{a}{2}=a\end{aligned}$$

两边取极限知 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\|2\boldsymbol{y}\|<a$, 即 $\boldsymbol{x}$ 位于 $C^n(a)$ 内. 且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{x}_{k+1}=\lim_{k\to+\infty}[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_k)]=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\\&=\boldsymbol{y}-[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}]=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

(2) 注意 (1) 中选取的 $\boldsymbol{x}$ 具有唯一性, 故 $\boldsymbol{f}^{-1}:C^n(a/2)\to C^n(a)$ 存在. 另一方面由

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}''\|=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|\geqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|=\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}')-\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}'')\right\|$$

可知 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 在 $C^n(a/2)$ 上一致连续, 从而连续, 则 $\boldsymbol{f}^{-1}(C^n(a/2))$ 为开集, 从而 $C^n(a)\cap\boldsymbol{f}^{-1}(C^n(a/2))$ 也是开集. 这就证明了

$$\boldsymbol{f}:C^n(a)\cap\boldsymbol{f}^{-1}\left(C^n\left(\frac{a}{2}\right)\right)\to C^n\left(\frac{a}{2}\right)$$

是同胚映射, 它将 $\mathbf{0}$ 的一个开邻域映成 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 的一个开邻域.

(3) 我们证明 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 可微, 从而 $J\boldsymbol{f}^{-1}$ 存在.

由题设 $\boldsymbol{f}$ 是 C^k 映射, 则 $\boldsymbol{f}$ 在 $C^n(a)\cap\boldsymbol{f}^{-1}(C^n(a/2))$ 的任一点 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 那么由无穷小增量公式 (命题 19.4.1) 有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

记 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 作用于上式两边得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{A}[o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_0)+\boldsymbol{A}[o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]$$

注意到

$$\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|}=\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|}\leqslant 2$$

我们有

$$\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0}\frac{\boldsymbol{A}[o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]}{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|}=\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0}\boldsymbol{A}\frac{[o(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_0)]}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\cdot\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|}=\mathbf{0}$$

从而

$$\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))+o(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)$$

由练习题 19.4.2 第 1 题知 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 可微.

(4) 由数学归纳法证明 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是 C^k 映射. 记 C^∞ 映射 $\boldsymbol{h}$ 为矩阵求逆, 注意到

$$J\boldsymbol{f}^{-1}=\boldsymbol{h}\circ J\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{f}^{-1}$$

因为 $\boldsymbol{f}$ 是 C^k 映射, 从而 $J\boldsymbol{f}$ 是 C^{k-1} 映射. 现在假设 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是 C^{l-1} 映射, 则经过复合后 $J(\boldsymbol{f}^{-1})$ 是 C^{l-1} 映射, 即 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是 C^l 映射. 由 (3) 知 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是 C^1 映射, 则根据数学归纳法命题得证.

综上, $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 都是 C^k 映射, 即 $\boldsymbol{f}$ 是 C^k 微分同胚.

注: 事实上这里的 $W=C^n(a)\cap\boldsymbol{f}^{-1}(C^n(a/2)),V=C^n(a/2)$ 都是 C^k 微分流形. 与第 3 题对应, 本题是逆映射存在定理的映射语言版本. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

2. 解答: 由例题 19.4.1 知存在 $z=x+\theta(y-x)$ 使得

$$(y-x)^{\mathrm{T}}\cdot[f(y)-f(x)]=(y-x)^{\mathrm{T}}\cdot Jf(z)\cdot(y-x)$$

由题设条件与 Cauchy 不等式知

$$|y-x|\cdot|f(y)-f(x)|\geqslant(y-x)^{\mathrm{T}}\cdot[f(y)-f(x)]\geqslant\alpha|y-x|^2$$

即有

$$|f(y)-f(x)|\geqslant\alpha|y-x|$$

并注意到

$$\det Jf(z)=\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\geqslant\alpha>0$$

由局部逆映射存在定理知 f^{-1} 是 C^1 映射, 即 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的微分同胚. □

3. 解答:(白正国定理 1.1.5) 设 U,V 分别为 $\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n$ 中的开子集, 映射 $f:U\times V\to\mathbb{R}^n$ 是 C^k 的, 若对于 $x_0\in U,y_0\in V$, 映射 $y\mapsto f(x_0,y)$ 在 y_0 的微分 $D_2f(x_0,y_0)$ 非奇异, 则存在 x_0 的邻域 $U_0\subset U$ 及惟一确定的 C^k 映射 $g:U_0\to\mathbb{R}^n$ 使得 $g(x_0)=y_0$, 且对于一切 $x\in U_0$, 有

$$f(x,g(x))=f(x_0,y)$$

证: 考虑映射

$$\begin{aligned}F:U\times V&\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\\(x,y)&\mapsto(x,f(x,y))\end{aligned}$$

则

$$DF(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}I_n & O\\ D_1f(x_0,y_0) & D_2f(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

其中 $D_1f(x_0,y_0)$ 是映射 $x\mapsto f(x,y_0)$ 在点 x_0 点的微分. 因为 $D_2F(x_0,y_0)$ 非奇异, 故 $DF(x_0,y_0)$ 非奇异. 由逆映射存在定理, 映射 F 在 (x_0,y_0) 充分小的邻域 $U_0\times V_0$ 中存在惟一的逆映射. 设

$$\begin{aligned}\pi:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}^n\\(x,y)&\mapsto y\end{aligned}$$

令

$$g(x)=\pi\circ F^{-1}(x,f(x_0,y_0)),\quad x_0\in U$$

则 g 即为所求映射.

注: 也可参看徐森林第二册定理 8.5.2. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

4. 解答: 计算得

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{a})=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

取初始点 $\boldsymbol{x}_0=(1,1)^{\mathrm{T}}$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\dfrac{u+v+1}{2}\\ \dfrac{v-u+1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\dfrac{u+v+1}{2}\\ \dfrac{v-u+1}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dfrac{uv+u}{2}\\ \dfrac{(v+1)^2-u^2}{2}\end{bmatrix}\right\}\\ &=\begin{bmatrix}\dfrac{u^2-v^2-uv+3u+2v+1}{4}\\ \dfrac{u^2-v^2+uv+u+2v+1}{4}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

逆映射的一次微分近似为

$$\boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}u\\ v-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{u+v+1}{2}\\ \dfrac{v-u+1}{2}\end{bmatrix}$$

它就是取初始点 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{a}$ 时 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 的一次迭代解 $(x_1,y_1)^{\mathrm{T}}$; 二次迭代解 $(x_2,y_2)^{\mathrm{T}}$ 收敛速度显著且精确. □

5. 解答: 不失一般性, 可以假设

$$\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}\right|_0\neq 0$$

定义 $\boldsymbol{F}:U\times\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^n$ 为

$$\boldsymbol{F}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{f}(x_1,x_2,\cdots,x_m)+(0,0,\cdots,0,x_{m+1}+x_{m+2}+\cdots,x_n)$$

则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, 且

$$\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_0=\det\begin{pmatrix}J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) & \boldsymbol{O}\\ & \boldsymbol{E}_{n-m}\end{pmatrix}=\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}\right|_0\neq 0$$

由第 1 题的结论, 存在 $\boldsymbol{F}$ 的局部逆映射 $\boldsymbol{h}$, 它是 C^k 微分同胚, 将 $\mathbb{R}^n$ 中 $\boldsymbol{0}$ 的一个开邻域 V 映成另一个开邻域 W, 使得 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ 及

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{f}\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)=\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{F}\left(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,0,\cdots,0\right)\right)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,0,\cdots,0\right)$$

命题得证. □

6. 解答: 不失一般性, 可以假设

$$\left.\frac{\partial\left(f_1,f_2,\cdots,f_m\right)}{\partial\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)}\right|_0\neq 0$$

定义 $\boldsymbol{F}:U\to\mathbb{R}^m$ 为

$$\boldsymbol{F}\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)=\left(f_1(\boldsymbol{y}),f_2(\boldsymbol{y}),\cdots,f_n(\boldsymbol{y}),y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_m\right)$$

再令

$$\boldsymbol{\pi}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$$

$$\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)\mapsto\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$$

则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\pi}\circ\boldsymbol{F}$, 且

$$\left.\frac{\partial\left(F_1,F_2,\cdots,F_n\right)}{\partial\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)}\right|_{\boldsymbol{0}}=\det\begin{pmatrix}J_y & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{m-n}\end{pmatrix}=\left.\frac{\partial\left(f_1,f_2,\cdots,f_n\right)}{\partial\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)}\right|_{\boldsymbol{0}}\neq 0$$

由第 1 题的结论, 存在 $\boldsymbol{F}$ 的局部逆映射 $\boldsymbol{\varphi}$, 它是 C^k 微分同胚, 将 $\mathbb{R}^n$ 中 $\boldsymbol{0}$ 的一个开邻域 V 映成另一个开邻域 W, 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ 及

$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\varphi}\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)=\boldsymbol{\pi}\circ\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{\varphi}\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)=\boldsymbol{\pi}\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$$

命题得证.

注: 以上两个命题称为秩定理, 是在以后学习的几何学 (如黎曼几何) 的基本定理, 其几何意义可参看 Rudin《数学分析原理》P207-P210. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第二十一章 偏导数的应用

§21.1.4 练习题 学员: d39

1. 解答: 曲线切向量 $\boldsymbol{i}=(1,2t,3t^2)$, 平面法向量 $\boldsymbol{j}=(1,2,1)$, 由题意有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0\Rightarrow t_1=-1,t_2=-1/3$$

所求点为 $(-1,1,-1)$ 与 $(-1/3,1/9,-1/27)$. □

2. 解答: 取直角坐标系如下: 赤道平面为 Oxy 平面, 球心为坐标原点, x 轴正向过 0° 子午线, z 轴正向过北极, 并取 $Oxyz$ 坐标系为右手系.

下面我们先确定斜驶线和子午线在直角坐标系中的方程. 为此, 假定讨论地球上的点的经度为 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, 纬度为 $\psi(-\pi/2\leqslant\psi\leqslant\pi/2)$, 则它在上述坐标系下的坐标为

$$\begin{cases} x=R\cos\psi\cos\varphi \\ y=R\cos\psi\sin\varphi \\ z=R\sin\psi \end{cases}$$

其中 R 为地球半径. 对

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=\mathrm{e}^{k\varphi}$$

两端微分, 得

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}=k\mathrm{e}^{k\varphi}\mathrm{d}\varphi=k\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}=\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)k\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)\right]^{-1}=\left[k\sin\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)\right]^{-1}=\frac{1}{k\cos\psi}$$

今将斜驶线来说, 在 (φ_0,ψ_0) 点, 有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\psi}&=-R\sin\psi_0\cos\varphi_0-R\cos\psi_0\sin\varphi_0\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}=-R\left(\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k}\right)\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\psi}&=-R\sin\psi_0\sin\varphi_0+R\cos\psi_0\cos\varphi_0\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\psi}=-R\left(\sin\psi_0\sin\varphi_0-\frac{\cos\varphi_0}{k}\right)\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\psi}&=R\cos\psi_0
\end{aligned}$$

于是可取斜驶切向量

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k},\sin\psi_0\sin\varphi_0-\frac{\cos\varphi_0}{k},-\cos\psi_0\right\}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

当 φ 为常数时即得子午线, 故其参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos\psi\cos\varphi_0 \\ y = R\cos\psi\sin\varphi_0 \\ z = R\sin\psi \end{cases}$$

于是, 子午线在点 (φ_0, ψ_0) 的切向量为

$$\boldsymbol{v}_2 = \{\sin\psi_0\cos\varphi_0, \sin\psi_0\sin\varphi_0, -\cos\psi_0\}$$

直接计算得

$$\cos(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|} = \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{-1/2}$$

即斜驶线与子午线相交成定角. □

3. 解答: 令

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6 \\ G(x, y, z) = x + y + z \end{cases}$$

它们在 $(1, -2, 1)$ 处的偏导数和 Jacobi 行列式之值分别为

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -4, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = -6, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} = 0, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = 6$$

所以曲线在 $(1, -2, 1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x - 1}{-6} = \frac{y + 2}{0} = \frac{z - 1}{6}$$

法平面方程为

$$-6(x - 1) + 0(y + 2) + 6(z - 1) = 0$$

即

$$x - z = 0$$

□

4. 解答: 计算可得

$$\boldsymbol{n} = \left\{-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, -1\right\}_{(1,1,\pi/4)} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right\}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

于是切面方程为

$$-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)-(z-\pi/4)=0 \Leftrightarrow z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y)$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\pi/4}{2}$$

□

5. 解答: 在曲面上任取一点 $\boldsymbol{P}_0(x_0,y_0,z_0)$, 则曲面在该点的切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$$

它与各坐标平面的交点为 $\boldsymbol{A}(3x_0,0,0),\boldsymbol{B}(0,3y_0,0),\boldsymbol{C}(0,0,3z_0)$. 注意到各坐标轴的垂直关系, 即知以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 各点为顶点的四面体体积为

$$\begin{aligned}V_{ABCO}&=\frac{1}{3}\boldsymbol{OC}\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OB}\\&=\frac{1}{6}\cdot 3z_0\cdot 3x_0\cdot 3y_0=\frac{9}{2}x_0y_0z_0=\frac{9}{2}a\end{aligned}$$

□

为常数, 本题获证.

§21.2.3 练习题 学员: d39

1. 解答: 外法线方向为 $\left\{\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right\}$, 单位化后为

$$\boldsymbol{n}=\left\{\frac{x}{a^2\Delta},\frac{y}{b^2\Delta},\frac{z}{c^2\Delta}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(x,y,z)}=\frac{x}{a^2\Delta}2x+\frac{y}{b^2\Delta}2y+\frac{z}{c^2\Delta}2z=\frac{2}{\Delta}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=\frac{2}{\Delta}$$

其中 $\Delta=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$.

□

2. 解答:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(uv)=&\frac{\partial}{\partial x}(uv)\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}(uv)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial z}(uv)\cos\gamma\\=&u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)+v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\\=&u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}+v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\end{aligned}$$

□

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

3. 解答: $\nabla f(u)=(f'(u)u_x,f'(u)u_y,f'(u)u_z)=f'(u)(u_x,u_y,u_z)=f'(u)\nabla u.$ □

4. 解答: 考虑

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}(\boldsymbol{P}_0)=f_x(\boldsymbol{P}_0)\cos\frac{2\pi i}{n}+f_y(\boldsymbol{P}_0)\sin\frac{2\pi i}{n}.$$

利用第六章第二组参考题第 1 题的结论可知

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2\pi i}{n}=\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2\pi i}{n}=0$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}(\boldsymbol{P}_0)=0$$ □

5. 解答: 利用例题 21.3.2 的方法, 取 $\boldsymbol{l}=(0,\pm1,0)$ 即为函数 u 增加最快的方向. □

6. 解答: 我们逐步验证:

(i) 考虑

$$|f(x,y)|=\left|x-y+\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x|+|y|+|y/2|\to0\quad(x,y)\to(0,0)$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$$

即 $f(x,y)$ 在原点连续.

(ii) 对任意 $\boldsymbol{l}=(a,b)\neq(0,0)(\boldsymbol{l}=(0,0)$ 时结论平凡), 考虑

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(\mathbf{0}+t\boldsymbol{l})-f(\mathbf{0})}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{ta-tb+\dfrac{t^3ab^2}{t^2a^2+t^2b^2}}{t}=a-b+\frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

即 $f(x,y)$ 在原点沿任何方向的方向导数都存在.

(iii) 计算得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=1$$

考虑

$$\begin{aligned}A&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\\&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x-\Delta y+\dfrac{\Delta x(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-\Delta x-\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\end{aligned}$$

取路径 $\Delta y=\Delta x$, 则

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{3}{4\Delta x}$$

易见 A 不存在, 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. □

§21.3.4 练习题 学员: d39

1. 解答: 注意到

$$\lim_{h\to 0}\frac{[u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)]-[u(x_0,y_0)-u(x_0-h,y_0)]}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u_x(x_0,y_0)-u_x(x_0-h,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}u_{xx}(x_0-h,y_0)=u_{xx}(x_0,y_0)$$

同理有

$$\lim_{h\to 0}\frac{[u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)]-[u(x_0,y_0)-u(x_0,y_0-h)]}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u_y(x_0,y_0)-u_y(x_0,y_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}u_{yy}(x_0,y_0-h)=u_{yy}(x_0,y_0)$$

显然命题得证. □

2. 解答:

(1) 令 $f_x=2x-4y=0, f_y=-4x+10y=0$ 得驻点 $(0,0)$. $A=f_{xx}(0,0)=2>0, B=f_{xy}(0,0)=-4, C=f_{yy}(0,0)=10, \Delta=AC-B^2>0$, 故 $(0,0)$ 是驻点且是极小值点.

(2) 由于 $f(x)=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$, 故 $(0,0)$ 是极小值点. 但 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在, 所以 $(0,0)$ 不是驻点.

(3) 令 $f_x=2x+2y=0, f_y=2x=0$ 得驻点 $(0,0)$. $A=f_{xx}(0,0)=2>0, B=f_{xy}=2, f_{yy}=0, \Delta=AC-B^2<0$, 故 $(0,0)$ 是驻点且但不是极值点. □

3. 解答:

(1) 令 $u_x=2x(y-1)^2=0, u_y=2x^2(y-1)=0$ 得驻点区域 $S=\{y=1\}\cup\{x=0\}$. 显然在 S 上有 $u(x,y)=0$, 而在 S 之外 $u(x,y)>0$, 故所有极小值点的集合为 S, 极小值为 0.

(2) 令 $u_x=x(6y-4x^2)=0, u_y=3x^2-4y=0$ 得惟一驻点 $(0,0)$. 再注意到

$$u(x,y)=-(x^2-2y)(x^2-y)$$

在 $(0,0)$ 的附近满足 $y=2/3x^2$ 时有 $u(x,y)>0$, 满足 $y=2x^2$ 时有 $u(x,y)<0$, 这说明 $(0,0)$ 不是极值点, 则 $u(x,y)$ 无极值点.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(3) 令 $u_x=-(1+e^y)\sin x=0, u_y=e^y(\cos x-1-y)=0$ 得驻点 $(k\pi,(-1)^k-1)(k\in\mathbb{Z})$. 再考虑

$$A=u_{xx}=-(1+e^y)\cos x,\quad B=u_{xy}=-e^y\sin x,\quad C=u_{yy}=e^y(\cos x-2-y)$$

在 k 为偶数时, 在 $(2k\pi,0)$ 处有 $A<0,\Delta=AC-B^2>0$, 可知 $(2k\pi,0)$ 是极大值点且极大值为 2; 而当 k 为奇数时, 在 $((2k+1)\pi,-2)$ 处有 $A>0,\Delta=AC-B^2<0$, 可知 $((2k+1)\pi,-2)$ 不是极值点. 因此 $u(x,y)$ 无极小值. □

4. 解答: 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sin y\sin(2x+y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\sin x\sin(x+2y)=0\end{cases}$$

在 D 上有 6 个解 $\boldsymbol{P}_1(0,0),\boldsymbol{P}_2(0,\pi),\boldsymbol{P}_3(\pi,0),\boldsymbol{P}_4(\pi,\pi),\boldsymbol{P}_5(\pi/3,\pi/3),\boldsymbol{P}_6(2\pi/3,2\pi/3)$. 首先易见 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4$ 是 D 的边界点, 故不能是极值点. 再考虑

$$A=f_{xx}=2\sin y\cos(2x+y),\quad B=f_{xy}=\sin 2(x+y),\quad C=f_{yy}=2\sin x\cos(x+2y)$$

在 $\boldsymbol{P}_5$ 处有 $A<0,\Delta=AC-B^2>0$, 故 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{P}_5$ 处取极大值 $3\sqrt{3}/8$; 在 $\boldsymbol{P}_6$ 处有 $A>0,\Delta=AC-B^2>0$, 故 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{P}_6$ 处取极小值 $-3\sqrt{3}/8$. □

5. 解答: 令 $f_x=3x^2-8x+2y=0, f_y=2x-2y=0$ 得驻点 $(0,0)$ 与 $(2,2)$. 考虑

$$A=f_{xx}=6x-8,\quad B=f_{xy}=2,\quad C=f_{yy}=-2$$

在 $(0,0)$ 处 $A<0,\Delta=AC-B^2>0$, 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取极大值; 在 $(2,2)$ 处 $A>0$, $\Delta=AC-B^2<0$, 故 $f(x,y)$ 在 $(2,2)$ 处不取极值. 因此 $f(x;y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有惟一极大值点 $(0,0)$, 极大值为 $f(0,0)=0$. 但是注意到 $f(5,0)>0$, 因此 $(0,0)$ 非最大值点. □

§21.4.4　练习题　学员: d39

1. 解答: 令

$$\begin{aligned}L&=x^4+y^4+z^4+\lambda(xyz-1)\\ L_x&=4x^3+\lambda yz=0\\ L_y&=4y^3+\lambda xz=0\\ L_z&=4z^3+\lambda xy=0\\ xyz&=1\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

解得驻点 $\boldsymbol{P}_1(1,1,1), \boldsymbol{P}_2(-1,-1,1), \boldsymbol{P}_3(-1,1,-1), \boldsymbol{P}_4(1,-1,-1)$ 且 $\lambda=-4$. 考虑对称性, 只需要检验其中一个点, 比如说 $\boldsymbol{P}_1$, 可计算得到

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_1)=\begin{pmatrix}12 & -4 & -4\\ -4 & 12 & -4\\ -4 & -4 & 12\end{pmatrix}=16\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)$. 由 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一维列向量可知 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $3,0,0$, 从而 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_1)$ 的特征值为 $4,16,16$, 即 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_1)$ 正定. 所以 $\boldsymbol{P}_1$ 为极小值点, 极小值为 $f(\boldsymbol{P}_1)=3$.

注: 其他方法参见裴礼文 P690 例 6.3.11. □

2. 解答: 令

$$\begin{aligned}L&=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)\\ L_x&=1+2\lambda x=0\\ L_y&=-2+\lambda y=0\\ L_z&=2+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2&=1\end{aligned}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}_1(1/3,-2/3,2/3), \boldsymbol{P}_2(-1/3,2/3,-2/3)$. 由于约束条件是有界闭集, 条件最值一定存在, 且出现在 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 中, 显然 $u(\boldsymbol{P}_1)=3$ 为极大值, $u(\boldsymbol{P}_2)=-3$ 为极小值. □

3. 解答: 令

$$\begin{aligned}L&=\cos^2 x+\cos^2 y+\lambda(x-y-\pi/4)\\ L_x&=-\sin 2x+\lambda=0\\ L_y&=-\sin 2y-\lambda=0\\ x-y&=\pi/4\end{aligned}$$

解得驻点 $\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\right)(k\in\mathbb{Z})$. 由于约束条件是有界闭集, 条件最值一定取到. 观察到当 k 为偶数时 z 取得极大值 $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, k 为奇数时 z 取得极小值 $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. □

4. 解答: 令 $u=\ln f(x,y,z)=l\ln x+m\ln y+n\ln z$, 令

$$\begin{aligned}L&=l\ln x+m\ln y+n\ln z-\lambda(ax+by+cz-k)\\ L_x&=\frac{l}{x}-a\lambda=0\\ L_y&=\frac{m}{y}-b\lambda=0\\ L_z&=\frac{n}{z}-c\lambda=0\\ ax+by+cz&=k\end{aligned}$$

(在 L_x,L_y,L_z 中解出 x,y,z 代入最后一式解出 λ 再回代)

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

解得驻点 $\boldsymbol{P}=\left(\dfrac{l}{a}\cdot\dfrac{l+m+n}{k},\dfrac{m}{b}\cdot\dfrac{l+m+n}{k},\dfrac{n}{c}\cdot\dfrac{l+m+n}{k}\right)$. 注意到 $x,y,z>0$, 约束条件的每块区域边界都含有 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $z=0$, 则当趋于边界时一定有 $u\to-\infty$, 因此 $\boldsymbol{P}$ 是 u 的极大值点, 由单调性 $\boldsymbol{P}$ 也是 f 的极大值点, 极大值为 $f(\boldsymbol{P})$. □

5. 解答: 令

$$L=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$

$$L_x=2\left(\frac{1}{a^2}-\lambda\right)x+\mu\cos\alpha=0 \tag{1}$$

$$L_y=2\left(\frac{1}{b^2}-\lambda\right)y+\mu\cos\beta=0 \tag{2}$$

$$L_z=2\left(\frac{1}{c^2}-\lambda\right)z+\mu\cos y=0 \tag{3}$$

$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{4}$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos y=0 \tag{5}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2 y=1 \tag{6}$$

将 $x\cdot(1)+y\cdot(2)+z\cdot(3)$ 代入 (4)(5) 后可以得到

$$\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=u(x,y,z) \tag{7}$$

将 $\cos\alpha\cdot(1)+\cos\beta\cdot(2)+\cos\gamma\cdot(3)$ 代入 (5)(6) 后可以得到

$$\mu=-2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}\right) \tag{8}$$

将 (8) 代入 (1)(2)(3) 得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2}-\lambda\right)x-\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{b^2}y-\dfrac{\cos\alpha\cos\gamma}{c^2}z=0\\ -\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}x+\left(\dfrac{\sin^2\beta}{b^2}-\lambda\right)y-\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{c^2}z=0\\ -\dfrac{\cos\alpha\cos\gamma}{a^2}x-\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{b^2}y+\left(\dfrac{\sin^2\gamma}{c^2}-\lambda\right)z=0\end{cases} \tag{9}$$

要使如上方程组有解, 则系数行列式为 0, 即

$$\begin{vmatrix}\sin^2\alpha-a^2\lambda & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma\\ -\cos\alpha\cos\beta & \sin^2\beta-b^2\lambda & -\cos\beta\cos\gamma\\ -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & \sin^2\gamma-c^2\lambda\end{vmatrix}=0$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

展开计算可得

$$\lambda\left[\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)\right]=0$$

由 (7) 可知 $\lambda\neq 0$, 且不难验证上式消去 λ 后得到的二次方程有两个不等的实根 $\lambda_1<\lambda_2$. 固定 $\lambda=\lambda_1$, 代入 (9), 可得到关于 (x,y,z) 有一个自由度的一个解系, 再代入方程 (4), 可得对应于 $\lambda=\lambda_1$ 的两个驻点 $\boldsymbol{P}_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $\boldsymbol{P}_2(x_2,y_2,z_2)$. 由 (7) 可知对应的 $u(\boldsymbol{P}_1)=u(\boldsymbol{P}_2)=\lambda_1$. 同理可求得对应于 $\lambda=\lambda_2$ 的两个驻点 $\boldsymbol{P}_3(x_3,y_3,z_3)$ 和 $\boldsymbol{P}_4(x_4,y_4,z_4)$, 且有 $u(\boldsymbol{P}_3)=u(\boldsymbol{P}_4)=\lambda_2$.

$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4$ 满足方程组 (1)~(5) 的一切解所对应的点. 类似前面几题的讨论可知函数 u 在 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 处取得极小值 λ_1, 在 $\boldsymbol{P}_3$ 和 $\boldsymbol{P}_4$ 处取得极大值 λ_2. □

6. 解答: 令

$$L=x_1x_2\cdots x_n+\lambda\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\begin{cases}L_{x_1}=x_2x_3\cdots x_n-\dfrac{\lambda}{x_1^2}=0\\ L_{x_2}=x_1x_3\cdots x_n-\dfrac{\lambda}{x_2^2}=0\\ \vdots\\ L_{x_n}=x_1x_2\cdots x_{n-1}-\dfrac{\lambda}{x_n^2}=0\\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{a}\end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}\,(an,an,\cdots,an)$ 且 $\lambda=(an)^{n+1}$. 计算可知

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P})=\begin{pmatrix}-2(an)^{n-2} & (an)^{n-2} & \cdots & (an)^{n-2}\\ (an)^{n-2} & -2(an)^{n-2} & \cdots & (an)^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (an)^{n-2} & (an)^{n-2} & \cdots & -2(an)^{n-2}\end{pmatrix}=-3(an)^{n-2}+(an)^{n-2}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^{\mathrm{T}}$$

类似第 1 题可知 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P})$ 的特征值是 $-2(an)^{n-2},-3(an)^{n-2},\cdots,-3(an)^{n-2}$. 所有特征值为负, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P})$ 负定, 所以 $u(\boldsymbol{P})=(an)^n$ 是极大值. □

7. 解答: 从约束条件不难推出 $0<x,y,z<\pi/2$, 令

$$w=\ln u=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z$$
$$L(x,y,z)=w+\lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right)$$

解方程组

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{cases} L_x = \cot x + \lambda = 0 \\ L_y = \cot y + \lambda = 0 \\ L_z = \cot z + \lambda = 0 \\ x + y + z = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$. 又因为趋于边界时 $u \to 0$, 在内部 $u > 0$, 所以最大值在内部取到, 则 $u(\boldsymbol{P}) = 1/8$ 就是极大值. □

8. 解答: 令

$$L = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i} - 1\right)$$

解方程组

$$\begin{cases} L_{x_i} = 2x_i + \dfrac{\lambda}{a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} = 1 \end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中 $x_i = \dfrac{1}{a_i}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$. 由于

$$\mathrm{d}^2 u = \mathrm{d}^2 L = 2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i^2 > 0$$

故 $u(\boldsymbol{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ 是极小值. □

9. 解答: 先考虑 $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ 内的极值. 令

$$\begin{cases} u_x = 3x^2 - 2yz = 0 \\ u_y = 3y^2 - 2xz = 0 \\ u_z = 3z^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P} = (0, 0, 0)$, 且 $u(\boldsymbol{P}) = 0$. 再考虑边界 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的条件最值. 令

$$L = x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = 3x^2 - 2yz + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L_y = 3y^2 - 2xz + 2\lambda y = 0 & (2) \\ L_z = 3z^2 - 2xy + 2\lambda z = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

通过 $yL_x = xL_y = zL_y = yL_z = xL_z = zL_x = 0$ 可得出

$$\begin{cases} (x-y)(3xy+2yz+2xz)=0 & (5) \\ (y-z)(3yz+2xz+2xy)=0 & (6) \\ (z-x)(3xz+2xy+2yz)=0 & (7) \end{cases}$$

考虑在 (5) 式中如果 $x=y$, 那么从 (6) 和 (4) 会得到

$$\begin{cases} (x-z)(5xz+2x^2)=0 & (8) \\ 2x^2+z^2=1 & (9) \end{cases}$$

1.1 考虑在 (8) 式中如果 $x=z$, 那么得到 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 此时得可疑值 $u(\boldsymbol{P}_1)=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

1.2 如果 $x\neq z$ 且 $5xz+2x^2=0$:

1.2.1 如果 $x=0$, 那么 $x=y=0, z=\pm 1$, 此时可疑值 $u(\boldsymbol{P}_2)=1, u(\boldsymbol{P}_3)=-1$.

1.2.2 如果 $x\neq 0$, 则 $5z+2x=0$, 结合 (9) 可知 $z=\sqrt{\dfrac{2}{27}}, x=y=-\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{2}{27}}$, 得到可疑值 $u(\boldsymbol{P}_4)\approx 0.02$.

由对称性, 当 $y=z$ 和 $z=x$ 时我们都可以得到解析解, 且最大的可疑值是 1, 最小的可疑值是 -1. 因此惟一剩下的情况就是

$$\begin{cases} 3xy+2yz+2xz=0 & (10) \\ 3yz+2xz+2xy=0 & (11) \\ 3xz+2xy+2yz=0 & (12) \end{cases}$$

两两联立得到 $xy=yz=zx=0$. 结合 (4) 不难求得所有解都是 x,y,z 其中两个为 0, 另一个为 ± 1, 此时可疑值都是 ± 1.

综上所述, u 的最大值是 1, 最小值是 -1.

注: 本题数据疑似有误, 可对照周民强第三册 P154 例 4.2.3(2). □

10. 解答: 先考虑内部, 令

$$\begin{cases} z_x = 2x-y=0 \\ z_y = 2y-x=0 \end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}(0,0)$, $z(\boldsymbol{P})=0$. 再考虑在每条边界线上, 令

$$L = x^2-xy+y^2-\lambda(x+y-1)$$

$$\begin{cases} L_x = 2x-y-\lambda=0 \\ L_y = 2y-x-\lambda=0 \\ |x|+|y|=1 \end{cases}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

解得驻点 $P_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $P_4\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, 对应值为

$$z(P_1)=z(P_4)=\frac{1}{4}, z(P_2)=z(P_3)=\frac{3}{4}$$

最后, 考虑四条边界线的交点 (不可微处), 有 $z(0,1)=z(0,-1)=z(1,0)=z(-1,0)=1$. 比较所有点处的值后, 可知最大值是 1, 最小值是 0. □

11. 解答: 考虑函数 $u=\sum\limits_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极值. 令

$$L(x,y,z)=u-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

解方程组

$$\begin{cases} L_x=2\left[(n-\lambda)x-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right]=0 & (1)\\ L_y=2\left[(n-\lambda)y-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right]=0 & (2)\\ L_z=2\left[(n-\lambda)z-\sum\limits_{i=1}^{n}z_i\right]=0 & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1 & (4)\end{cases}$$

由 (1)(2)(3) 得

$$x=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad y=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad z=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}z_i$$

代入 (4) 得

$$(n-\lambda)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2=N^2$$

其中 N 是确定的正数. 于是得

$$x'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i, y'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i, z'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$$

$$x''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i, y''=-\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{n}y_i, z''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$$

从而

$$\begin{aligned}u(x',y',z')&=\sum_{i=1}^{n}[(x'-x_i)^2+(y'-y_i)^2+(z'-z_i)^2]\\&=n(x'^2+y'^2+z'^2)-2x'\sum_{i=1}^{n}x_i-2y'\sum_{i=1}^{n}y_i-2z'\sum_{i=1}^{n}z_i+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$= n - \frac{2}{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2\right] + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$= n - 2N + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

同理可得

$$u(x'', y'', z'') = n + 2N + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) > u(x', y', z')$$

由于函数 u 在闭球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上连续, 故必取得最大值和最小值, 因此 $u(x', y', z')$ 是最小值, $u(x'', y'', z'')$ 是最大值. □

12. 解答: 设曲线上的点为 (x, y), 自然有 $x \geqslant 0$, 则有

$$d = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^3 + x^2 + 2x + 1} \geqslant 1$$

注: 从几何上来看是显然的. □

13. 解答: 设三角形边长为 a, b, c, 周长为 l 是常值, 考虑在约束条件 $a+b+c=l$ 下 $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ 的条件最值 (这是由 Helen 公式得到的, 其中 $p = l/2$). 令

$$L = p(p-a)(p-b)(p-c) + \lambda(a+b+c-l)$$

求解

$$\begin{cases} L_a = -p(p-b)(p-c) + \lambda = 0 \\ L_b = -p(p-a)(p-c) + \lambda = 0 \\ L_c = -p(p-a)(p-b) + \lambda = 0 \end{cases}$$

解得惟一驻点 $(l/3, l/3, l/3)$, 此时 S 取得最大值, 它是等边三角形. □

14. 解答: 考虑在约束条件 $a = \prod_{i=1}^{n} x_i$ 或 $\ln a = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ 下 $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$ 的极值. 令

$$L = u + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \ln a\right)$$

解方程组

$$\begin{cases} L_{x_i} = -\dfrac{1}{x_i^2} + \dfrac{\lambda}{x_i} = 0 (i = 1, 2, \cdots, n) \\ a = \prod_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$$

可得 $x_i = \lambda^{-1}$, 则驻点为 $\boldsymbol{P}(a^{1/n}, a^{1/n}, \cdots, a^{1/n})$, $u(\boldsymbol{P}) = na^{-1/n}$. 又因为在趋于边界时至少有一个 $x_i \to 0$, 则 $u > 1/x_i \to +\infty$. 因此, 函数 u 在内部取得最小值 $na^{-1/n}$. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

15. 解答: 设两段为 x 和 y, x 代表正方形周长, y 代表圆的周长, 依题意, 考虑 $S=S_1+S_2=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{y^2}{4\pi}$ 在约束条件 $x+y=a$ 下的极值. 令

$$L=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{y^2}{4\pi}-\lambda(x+y-a)$$

求解

$$\begin{cases} L_x=x/8-\lambda=0 \\ L_y=\dfrac{y}{2\pi}-\lambda=0 \\ x+y=a \end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}\left(\frac{4a}{\pi+4},\frac{\pi a}{\pi+4}\right)$. 比较边界端点 $(0,a)$ 和 $(a,0)$ 的值易知 $S(\boldsymbol{P})=\dfrac{a^2}{4(\pi+4)}$ 就是最大值. □

16. 解答: 在椭圆方程两边对 x 求导得

$$6x+(2xy'+2y)+6yy'=0$$

整理得斜率为 $y'=-\dfrac{3x+y}{x+3y}$, 从而在某点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{3x_0+y_0}{x_0+3y_0}(x-x_0)$$

截距为 $y_0+x_0\dfrac{3x_0+y_0}{x_0+3y_0}$ 和 $x_0+y_0\dfrac{x_0+3y_0}{3x_0+y_0}$. 不妨先考虑截距在第一象限的情形. 先考虑在第一象限, 此时问题转化为在约束条件 $3x^2+2xy+3y^2=1, x>0, y>0$ 下

$$S=\frac{1}{2}\left[xy+\frac{xy(x+3y)}{3x+y}+\frac{xy(3x+y)}{x+3y}+xy\right]$$

的最小值. 我们先考虑 xy 的最小值. 令

$$L=xy+\lambda(3x^2+2xy+3y^2-1)$$

$$\begin{cases} L_x=y+6\lambda x+2\lambda y=0 \\ L_y=x+6\lambda y+2\lambda x=0 \\ 3x^2+2xy+3y^2=1 \end{cases}$$

不难解得惟一解 $x=y=2^{-\frac{3}{2}}$, 此时 $xy=1/8$. 比较 $(1/3,4/9)$ 处 $S=4/27>1/8$ 可确定此时 xy 取到最小值.

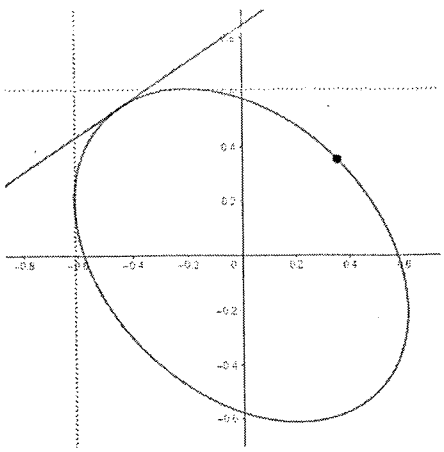
内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

于是有

$$S \geqslant \frac{1}{2} \cdot 4xy = 2xy \geqslant 1/4$$

等号在 $x = y = 2^{-\frac{3}{2}}$ 时取到.

而当考虑截距处于第二象限时, 观察到截距的绝对值必然都大于 $2^{-\frac{3}{2}}$, 所得三角形面积必然比之前求得的大.



由对称性, 截距在第三第四象限时的情形都是类似的, 我们不再加以讨论.

综上可知最小的三角形是由 $(0,0),(2^{-\frac{1}{2}},0),(0,2^{-\frac{1}{2}})$ 构成的三角形. □

17. 解答: 考虑在约束条件 $(x-y)^2+z^2=1$ 下 $u=x^2+y^2+z^2$ 的最小值. 令

$$L = x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2+z^2-1]$$

求解

$$\begin{cases} L_x = 2x+\lambda(2x-2y) = 0 \\ L_y = 2y+\lambda(2y-2x) = 0 \\ L_z = 2z+2\lambda z = 0 \\ (x-y)^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

解得驻点 $\boldsymbol{P}_1(0,0,1), \boldsymbol{P}_2(0,0,-1), \boldsymbol{P}_3(1/2,-1/2,0), \boldsymbol{P}_4(-1/2,1/2,0)$. 对比知 $u(\boldsymbol{P}_3)$ 是其中值最小的, 此时 $\lambda = -1/2$, 检验知

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

半正定. 进一步检验

$$\mathrm{d}^2L = \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2+\mathrm{d}z^2$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

对约束条件求微分得

$$(2x-2y)\mathrm{d}x+(2y-2x)\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=0\Rightarrow \mathrm{d}z=(y-x)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$$

代入 d^2L 得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2L&=(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2+[(y-x)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y]^2\\&=[(x-y)^2+1]\mathrm{d}x^2-[2(x-y)^2-2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+[(x-y)^2+1]\mathrm{d}y^2\end{aligned}$$

在 $\boldsymbol{P}_3$ 处对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

正定. 所以 $u(\boldsymbol{P}_3)$ 是极小值也是最小值, 则最短距离是 $\sqrt{u(\boldsymbol{P}_3)}=\sqrt{2}/2$. □

18. 解答: 考虑在约束条件 $x^2-xy+y^2-z^2=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 下 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的条件最值. 事实上由约束条件可以得到 $z^2=-xy\geqslant 0$, 从而

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1-xy}\geqslant 1$$

并且在 $(1,0,0)$ 处可以取到等号. 所以最短距离是 1. □

19. 解答: 设外切三角形 ΔABC 三边长为 a,b,c, 各边上三个切点为 D,E,F, 记 $BD=BF=x,AE=AF=y,CD=CE=z$, 则有 $x+y=a,y+z=b,x+z=c$. 并记周长的一半为 p, 则有

$$p=\frac{1}{2}(2x+2y+2z)=x+y+z$$

由 Helen 公式有

$$S=\sqrt{p(p-x-y)(p-y-z)(p-z-x)}=\sqrt{(x+y+z)xyz}$$

又由内切圆的性质有

$$2S=sr=(x+y+z)r$$

于是有

$$\sqrt{(x+y+z)xyz}=(x+y+z)r\Rightarrow xyz=(x+y+z)r^2=Sr$$

$$\Rightarrow S=(x+y+z)r\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}\cdot r=3\sqrt[3]{Sr}\cdot r\Rightarrow S\geqslant 3\sqrt{3}r^2$$

等号当且仅当 $x=y=z$ 时取到, 即 ΔABC 为等边三角形. □

20. 解答: 设 a,b,c,d 是给定边长, 一组对角和为 θ. 由著名的 Bretschneider 公式有

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{\theta}{2}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(其中 $p=(a+b+c+d)/2$)

显然当 $\theta=\pi$ 时 S 取得最大值. 此时该四边形四顶点共圆. □

21. 解答: 设四个顶点是 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)$, 四边形内任意一点是 (x,y), 则

$$\begin{aligned} d&=\sum_{i=1}^{4}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]\\ &=[4x^2-2(x_1+x_2+x_3+x_4)x+\sum_{i=1}^{4}x_i^2]+[4y^2-2(y_1+y_2+y_3+y_4)y+\sum_{i=1}^{4}y_i^2] \end{aligned}$$

中括号内是开口向上的抛物线, 对称轴分别是 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_i/4$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{4}y_i/4$, 此时 d 可取最小值.

8 注: (1) 凸四边形的条件是用来保证所求得的点处于四边形内.

(2) 这个结论容易推广到 n 边形的情形. □

22. 解答: 设椭圆为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 内接三角形的三个顶点为 A,B,C(逆时针排列), 则

$$2S=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_1y_3-x_2y_1$$

令

$$L=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_1y_3-x_2y_1+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\left(\frac{x_i^2}{a^2}+\frac{y_i^2}{b^2}-1\right)$$

求解

$$\begin{cases} L_{x_1}=y_2-y_3+2\lambda_1x_1/a^2=0\\ L_{x_2}=y_3-y_1+2\lambda_2x_2/a^2=0\\ L_{x_3}=y_1-y_2+2\lambda_3x_3/a^2=0\\ L_{y_1}=x_3-x_2+2\lambda_1y_1/b^2=0\\ L_{y_2}=x_1-x_3+2\lambda_2y_2/b^2=0\\ L_{y_3}=x_2-x_1+2\lambda_3y_3/b^2=0\\ \dfrac{x_i^2}{a^2}+\dfrac{y_i^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

解得驻点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 满足 (事实上这等价于原点 O 为 A,B,C 的重心)

$$x_1+x_2+x_3=0,\quad y_1+y_2+y_3=0$$

且此时 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, 而 S 可取最大值. 下面来求最大值:

设满足上述条件的三点为 $A(a\cos\alpha,b\sin\alpha),B(a\cos\beta,b\sin\beta),C(-a(\cos\alpha+\cos\beta))$,

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$-b(\sin\alpha+\sin\beta)$. 由 C 在椭圆上可知

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=1\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\sin(\alpha-\beta)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由面积公式

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{1}{2}|ab(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)|=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle AOB}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$$

再考虑任意一个顶点 (不妨假设是 A) 处的法线与所对的边正交, 事实上只要说明 A 点处切线斜率与所对的边斜率相同即可. 容易计算出 A 点处切线斜率为

$$k_A=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=-\frac{b^2(x_2+x_3)}{a^2(y_2+y_3)}$$

另一方面

$$k_{BC}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$$

即证

$$-\frac{b^2(x_2+x_3)}{a^2(y_2+y_3)}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\Leftrightarrow b^2(x_3^2-x_2^2)+a^2(y_3^2-y_2^2)$$
$$\Leftrightarrow\frac{x_3^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_3^2-y_2^2}{b^2}=0$$

最后一个等号是显然的, 这是因为 B 和 C 都在椭圆上. 至此结论证毕.

注: (1) 本题还可以继续推广. 事实上, 给定逆时针排列的 n 个点 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$, n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积表达式为

$$2S=\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_3&y_3\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}x_n&y_n\\x_1&y_1\end{vmatrix}$$

仿照本题求条件极值的过程可知当

$$x_1+x_2\cdots+x_n=0,\quad y_1+y_2+\cdots+y_n=0$$

时椭圆内接 n 边形的面积最大, 最大值为 $\frac{1}{2}nab\sin\frac{2\pi}{n}$.

(需要澄清的是这并不等价于原点是 n 边形的重心, 只有对三角形而言重心坐标才是各点坐标的算数平均值)

(2) 如若本题不使用条件极值, 也可分割内接多边形后使用 Jensen 不等式. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

23. 解答: 考虑在约束条件 $x^2+4y^2=4$ 下求

$$d^2=\frac{|3x+4y-12|^2}{5^2}=\frac{9x^2+24xy-72x+16y^2-96y+144}{25}$$

的最小值. 令

$$L=\frac{9x^2+24xy-72x+16y^2-96y+144}{25}+\lambda(x^2+4y^2-4)$$

求解

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{18x+24y-72}{25}+4\lambda x=0\\ L_y=\dfrac{32y+24x-96}{25}+8\lambda y=0\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$$

解得驻点 $\left(\pm\frac{6}{5},\pm\frac{4}{5}\right)$. 显然 d^2 最大值不存在且最小值存在, 故此时 d 能取最小值 $\frac{36}{25}$. □

24. 解答: 由对称性, 不妨只考虑截距都处于第一象限. 椭圆在 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

截距为 $OA=a^2/x_0$ 和 $OB=b^2/y_0$, 即求

$$AB^2=\frac{a^4}{x_0^2}+\frac{b^4}{y_0^2}$$

的最小值. 事实上由

$$a^2b^2=b^2x_0^2+a^2y_0^2\geqslant 2abx_0y_0\Rightarrow x_0y_0\leqslant ab/2$$

可推出

$$AB^2=\frac{a^4y_0^2+b^4x_0^2}{x_0^2y_0^2}\geqslant\frac{2a^2b^2}{x_0y_0}\geqslant\frac{2a^2b^2}{ab/2}=4ab$$

等号当 $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}a, y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}b$ 时可以取到. 此时有最小值 $AB=2\sqrt{ab}$. □

25. 解答: 设抛物线上两点为 (a,a^2) 和 (b,b^2), 在 (a,a^2) 处的法线方程为

$$y-a^2=2a(x-a)$$

由题意, 即考虑约束条件

$$2a\cdot\frac{b^2-a^2}{b-a}=2a(a+b)=-1\Rightarrow b=-\frac{2a^2+1}{2a}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

下, 求

$$d^2=(b-a)^2+(b^2-a^2)^2=\frac{1}{16a^4}+4a^2+\frac{3}{4a^2}+3$$

的最小值. 我们令

$$\frac{\mathrm{d}(d^2)}{\mathrm{d}a}=\frac{(2a^2-1)(4a^2+1)^2}{4a^5}=0$$

即可解出当 $a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时 d 有最小值 $\dfrac{\sqrt{27}}{2}$. □

26. 解答: 当椭圆面积最小时一定与圆相切, 设切点 (x_0,y_0). 利用椭圆和圆在此交点处斜率相同可得

$$\begin{cases}-\dfrac{x_0-1}{y_0}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}\\ 1-(x_0-1)^2=b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)\end{cases}$$

由第一式解得 $x_0=\dfrac{a^2}{a^2-b^2}$, 代入第二式得约束条件 $a^2-a^2b^2+b^4=0$. 令

$$L=\pi ab+\lambda(a^2-a^2b^2+b^4)$$

求解

$$\begin{cases}L_a=\pi b+2\lambda(a-ab^2)=0\\ L_b=\pi a+2\lambda(-a^2b+2b^3)=0\quad a^2-a^2b^2+b^4=0\end{cases}$$

得驻点 $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$, 此时椭圆面积最小为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$. □

27. 解答:

(1) 结论在第二十章 20.1.1 中

$$f''(x)=\frac{1}{F_y^3}(2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}-F_y^2F_{xx})$$

(2) 由于 $f(x_0)$ 是极值, 故必有

$$f'(x_0)=-\frac{F_x}{F_y}\Big|_{(x_0,y_0)}=0\Rightarrow F_x(x_0,y_0)=0\Rightarrow f''(x_0)=-\frac{F_{xx}(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

当 $F_y(x_0,y_0)$ 和 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 同号时 $f''(x_0)<0$, 此时可知 $f(x_0)$ 是极大值; 当 $F_y(x_0,y_0)$ 和 $F_{xx}(x_0,y_0)$ 异号时 $f''(x_0)<0$, 此时可知 $f(x_0)$ 是极小值.

(3) 令 $F(x,y)=x^2+xy+y^2-27=0$, 求解

$$\begin{cases}F_x=2x+y=0\\ x^2+xy+y^2=27\end{cases}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

可得驻点 $(3,-6)$ 和 $(-3,6)$. 再计算 $F_y(x_0,y_0)=2y_0+x_0, F_{xx}(x_0,y_0)=2$, 可知 $F_y(3,-6)$ 和 $F_{xx}(3,-6)$ 异号, $F_y(-3,6)$ 和 $F_{xx}(-3,6)$ 同号, 故 $(3,-6)$ 是极小值点, $(-3,6)$ 是极大值点. □

28. 解答: 当椭圆面积最大的时候一定与 ∂D 相切, 设切点 (x_0,y_0)(由对称性不妨设在第一象限), 类似第 26 题的方法可得

$$\begin{cases} -2x_0=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0} \\ -x_0^2+1=\sqrt{b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)} \end{cases}$$

解得约束条件 $4a^4-4a^2+b^2=0$. 令

$$L=\pi ab+\lambda(4a^4-4a^2+b^2)$$

求解

$$\begin{cases} L_a=\pi b+\lambda(16a^3-8a)=0 \\ L_b=\pi a+2\lambda b=0 \\ 4a^4-4a^2+b^2=0 \end{cases}$$

解得驻点 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, 此时椭圆面积最大为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$. □

§21.6.2 参考题 学员: d39

第一组参考题 学员: d39

1. 解答:

(1) 令 $G(x,y,z)=F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)$, 因为

$$(G_x,G_y,G_z)=\left(\frac{F_1}{z-c},\frac{F_2}{z-c},-\frac{(x-a)F_1+(y-b)F_2}{(z-c)^2}\right)$$

所以曲面上任意一点 $\boldsymbol{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\left(F_1(\boldsymbol{P}_0),F_2(\boldsymbol{P}_0),-\frac{(x_0-a)F_1(\boldsymbol{P}_0)+(y_0-b)F_2(\boldsymbol{P}_0)}{z_0-c}\right)$$

由此得到在 (a,b,c) 处的切平面方程为

$$F_1(\boldsymbol{P}_0)(a-x_0)+F_2(\boldsymbol{P}_0)(b-y_0)-\frac{(x_0-a)F_1(\boldsymbol{P}_0)+(y_0-b)F_2(\boldsymbol{P}_0)}{z_0-c}(c-z_0)=0$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

这说明曲面的切平面一定经过 (a,b,c).

(2) 简便起见, 我们记 $x-a=x_1, y-b=x_2, z-c=g(x_1,x_2)$, 则有 $F\left(\dfrac{x_1}{g},\dfrac{x_2}{g}\right)=0$, 记 $u=\dfrac{x_1}{g}, v=\dfrac{x_2}{g}$, 在方程两边分别对 x_1 和 x_2 求偏导得

$$\begin{cases} F_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+F_2\dfrac{\partial v}{\partial x_1}=0 \\ F_1\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+F_2\dfrac{\partial v}{\partial x_2}=0 \end{cases}$$

题设 $z(x,y)$ 能被确定隐含了 F_1 和 F_2 不为 0, 从而上述方程组的系数行列式为 0, 即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} \end{vmatrix}=0 \tag{1}$$

再计算得

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{g}-\frac{x_1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x_1},\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{x_2}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x_2},\quad \frac{\partial v}{\partial x_1}=-\frac{x_1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x_1},\quad \frac{\partial v}{\partial x_2}=\frac{1}{g}-\frac{x_2}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x_2}$$

代入 (1) 式可得

$$\frac{1}{g^2}-\frac{1}{g^3}\left(x_1\frac{\partial g}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)=0\Rightarrow x_1\frac{\partial g}{dx_1}+x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}=g$$

两边再对 x_1 和 x_2 分别求偏导可得

$$\begin{cases} x_1\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}+x_2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}=0 \\ x_1\dfrac{\partial g}{\partial x_1\partial x_2}+x_2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}=0 \end{cases}$$

同理可知系数行列式为 0, 即

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial g}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2=0$$

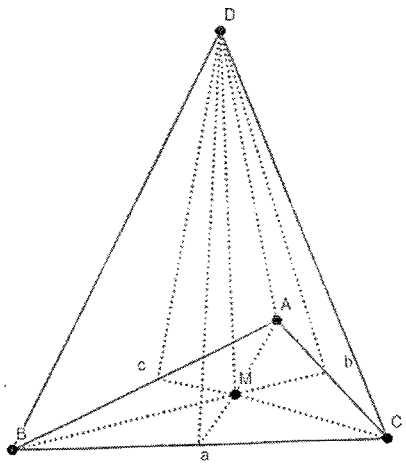
由于

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

显然命题已经得证. □

2. 解答: 设顶点在三角形中的投影为 M, 其到 a,b,c 三边的距离分别是 x,y,z, 则

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。



设三角形面积为 S, 则有限制条件

$$ax+by+cz=2S$$

(由于 a,b,c 确定, 则 S 也是定值) 而目标函数为侧面积

$$S_{侧}=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{h^2+x^2}+b\sqrt{h^2+y^2}+c\sqrt{h^2+z^2}\right)$$

令

$$L=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{h^2+x^2}+b\sqrt{h^2+y^2}+c\sqrt{h^2+z^2}\right)+\lambda(ax+by+cz-2S)$$

求解

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}+a\lambda=0\\ L_y=\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{h^2+y^2}}+b\lambda=0\\ L_z=\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{z}{\sqrt{h^2+z^2}}+c\lambda=0\\ ax+by+cz=2S\end{cases}$$

解得驻点 $\left(\dfrac{2S}{3(a+b+c)},\dfrac{2S}{3(a+b+c)},\dfrac{2S}{3(a+b+c)}\right)$, 此时 $S_{侧}$ 达到最小值, 该棱锥为正三棱锥. □

3. 解答: 直接计算得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=&\frac{\partial}{\partial l}(u_x\cos\alpha+u_y\cos\beta+u_z\cos\gamma)\\ =&u_{xx}\cos^2\alpha+u_{yy}\cos^2\beta+u_{zz}\cos^2\gamma\\ &+2u_{xy}\cos\alpha\cos\beta+2u_{xz}\cos\alpha\cos\gamma+2u_{yz}\cos\beta\cos\gamma\end{aligned}$$ □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

4. 解答: 记 $\boldsymbol{l}_1=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{l}_2=(b_1,b_2,b_3),\boldsymbol{l}_3=(c_1,c_2,c_3)$. 由题意可知

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

是一个正交矩阵. 因此也满足

$$a_i^2+b_i^2+c_i^2=1,\qquad i=1,2,3$$

$$a_ia_j+b_ib_j+c_ic_j=0,\qquad 1\leqslant i\neq j\leqslant 3$$

(1)(2) 计算可知

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}_3}\right)^2=&\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\\&+\left(a_3^2+b_3^2+c_3^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\\&+2\left(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3\right)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\\&+2\left(a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1\right)\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\\=&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}_3^2}=&\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(a_3^2+b_3^2+c_3^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\&+2\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\left(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\&+2\left(a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\\=&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{aligned}$$

(3) 由第 (1) 问可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

类似练习题 19.2.4 第 7 题可知 $f(x,y,z)\equiv C$.

注: 本题容易推广至 n 维情形. □

5. 解答: 只证 (1), (2) 类似.

构造 $F(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))$. 注意到当 $0<t\leqslant 1$ 时对 $\forall \boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 有

$$F'(t)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\nabla f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))=\frac{\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0}{t}\nabla f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))<0$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

由 $F(t)$ 在 $t=0$ 处的连续性可知

$$f(\boldsymbol{x})=F(1)<F(0)=f(\boldsymbol{x}_0)$$

所以 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个极大值点. □

6. 解答: 构造 $F(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)),0\leqslant t\leqslant 1$. 对 $\forall \boldsymbol{x}\in O_{\delta_0}(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 有

$$F'(t)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\nabla f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))$$

$$F''(t)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}$$

由 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$ 正定及连续性可知存在 $\delta'\in(0,\delta_0)$ 使得当 $t\in(0,\delta')$ 时有 $F''(t)>0$. 又 $F'(0)=0$, 故当 $t\in(0,\delta')$ 时有 $F'(t)>F'(0)=0$. 取 $\delta=\delta'\delta_0<\delta_0$, 令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$, 则有

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0)\nabla f(\boldsymbol{y})=\frac{F'(t)}{t}>0$$

注意 $\boldsymbol{y}$ 的任意性 (即对 $\boldsymbol{y}\in O_\delta(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 都能找到 $t\in(0,\delta')$ 和 $\boldsymbol{x}\in O_{\delta_0}(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 使得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$) 从而命题得证. □

7. 解答: 考虑函数 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^n x_i^q$ 在条件 $\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i=c$ 下的极值. 为此, 设

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x^q+\lambda\left(\sum_{i=1}^n a_ix_i-c\right)$$

由题意 $p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 知 $q>1,1+\dfrac{1}{q-1}=p$. 求解

$$\begin{cases}G_{x_i}=qx_i^{q-1}+\lambda a_i=0, & i=1,2,\cdots,n\\ G_\lambda=\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i-c=0\end{cases}$$

可得

$$0=qx^q+\lambda a_ix_i,q\sum_{i=1}^n x_i^q=-\lambda\sum_{i=1}^n a_ix_i=-\lambda c\Rightarrow\sum_{i=1}^n x_i^q=-\frac{\lambda c}{q}$$

再由 $qx_i^{q-1}=-\lambda a_i$, 得 $x_i=\left(-\dfrac{\lambda a_i}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}}$, 又有

$$c=\sum_{i=1}^n a_ix_i=\sum_{i=1}^n\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}}a_i^{1+\frac{1}{q-1}}=\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}}\sum_{i=1}^n a_i^p$$

解得

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$-\frac{\lambda}{q}=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}\right]^{q-1}=\left[c/\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right]^{q-1}.$$

因此有

$$x_i=\left(a_i\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}\right]^{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}=a_i^{\frac{1}{q-1}}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}=a_i^{\frac{1}{q-1}}\frac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}$$

再由

$$\frac{\partial^2G}{\partial x_i^2}=q(q-1)x_i^{q-2},\quad \frac{\partial^2G}{\partial x_i\partial x_j}=0,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

知

$$\mathrm{d}^2G\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=q(q-1)\sum_{i=1}^{n}x^{q-2}\mathrm{d}x_i^2>0$$

故当 $x_i=a_i\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}=\dfrac{a_i^{\frac{1}{q-1}}c}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}$ 时, 函数在 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i=c$ 下有惟一的极小值, 也是最小值, 即

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^q=g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\geqslant g\left[a_1^{\frac{1}{q-1}}\frac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p},\cdots,a_n^{\frac{1}{q-1}}\frac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j^{\frac{1}{q-1}}\frac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}\right)^q=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^q}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^q}\sum_{j=1}^{n}a_j^{\frac{q}{q-1}}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^q\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1-q}$$

于是就得到

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

注: 其他证法参见徐森林上册第 406 题. □

8. 解答: 令

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$$

求解

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{cases} L_x = 2Ax + 2Fy + 2Ez - 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2Fx + 2By + 2Dz - 2\lambda y = 0 \\ L_z = 2Ex + 2Dy + 2Cz - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

可解得 $f(x,y,z) = \lambda$, 而从前三式中可以看出 λ 是

$$\begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$$

的特征值. 又 f 在有界闭集 $\{f(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ 上连续, 故最大值和最小值存在, 则恰好是上述矩阵的最大特征值和最小特征值. □

9. 解答:

(1) 令 $F = |\boldsymbol{A}| + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left(H_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)$, 记 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} 求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_{ij}} = A_{ij} - 2\lambda_i a_{ij} = 0, \quad i,j = 1,2,\cdots,n \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = s_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

解得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} - 2\lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$$

从而有惟一驻点

$$a_{ij} = \frac{A_{ij}}{2\lambda_i} = \frac{A_{ij}H_i}{|A|}$$

注意到当 $i \neq j$ 时

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \frac{H_j}{|A|} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0$$

即行向量两两正交.

(2) 由第 (1) 题的结论可知在驻点处有

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}| \left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = \begin{vmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} H_i$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(3) 由第 (2) 问, 取 $H_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}$, 则

$$|\boldsymbol{B}|^2\leqslant\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ij}^2\right)$$

(4) 以三维空间为例, 上式中 $|\boldsymbol{B}|$ 代表以三个向量 $\boldsymbol{l}_1=(b_{11},b_{12},b_{13}),\boldsymbol{l}_2=(b_{21},b_{22},b_{23}),\boldsymbol{l}_3=(b_{31},b_{32},b_{33})$ 张成的平行六面体的体积, 而 $\prod\limits_{j=1}^{n}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}^2}$ 表示的是由 $\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_3$ 模长构成的长方体的体积, 前者的体积比后者的小.

注: Hadamard 不等式还有许多其他证法, 参见《吉米多维奇学习指引》第三册习题 3674.

事实上还有更一般的命题: 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 正定, 则有 $|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

在命题中取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 正定 (如果 $\boldsymbol{B}$ 有零特征值结论平凡), 则得到 Hadamard 不等式.

下面介绍证明这个命题的几种方法:

证法一: 由 $\boldsymbol{A}$ 正定, 知存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

由于 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵, 故

$$\sum_{i=1}^{n}p_{ij}^2=1,j=1,2,\cdots,n$$

从而由 $-\ln x$ 的凸性和 Jensen 不等式可得

$$a_{ii}=\lambda_1p_{i1}^2+\lambda_2p_{i2}^2+\cdots+\lambda_np_{in}^2\geqslant\lambda_1^{p_{i1}^2}\lambda_2^{p_{i2}^2}\cdots\lambda_n^{p_{in}^2}$$

将 a_{ii} 相乘即证命题.

证法二: 由 $\boldsymbol{A}$ 正定知 $a_{ii}>0,n=1,2,\cdots,n$, 令

$$\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}},\frac{1}{\sqrt{a_{22}}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right)$$

则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 对角线元素均为 1, 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个特征值, 则

$$|\boldsymbol{B}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\leqslant\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}{n}\right)^n=\left(\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})}{n}\right)^n=1$$

又

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{P}^T\right|=|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}$$

易见 $|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证法三: 参见北四高代第五章补充题第 8 题第 (3) 问. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

10. 解答:

(1) 反证结论不成立, 记 D 为单位圆盘, 则必存在 $(x_0,y_0)\in D$ 使得 $u(x_0,y_0)<0$, 因而 u 在 D 上的最小值必在 D 中的某点取到. 不妨设该点就是 (x_0,y_0), 则由题设条件可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)=u(x_0,y_0)<0$$

这说明 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)$ 和 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ 中至少有一个为负. 不妨设 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$, 这说明单变量函数 $u(x,y_0)$ 在 x_0 处取到严格极大值, 这与 $u(x_0,y_0)$ 是极小值矛盾.

(2) 对充分小的 $\varepsilon>0$, 构造

$$\varphi(x,y)=u(x,y)-\varepsilon(e^x+e^y)$$

由题设可知它在 ∂D 上取正值, 而且有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=\varphi$$

由 (1) 的结论可知 $\varphi(x,y)\geqslant 0$, 因而

$$u(x,y)=\varphi(x,y)+\varepsilon(e^x+e^y)>0$$

得证. □

11. 解答: 参见史济怀定理 14.23. □

12. 解答: 参见史济怀定理 14.26. □

第二组参考题 学员: d39

1. 解答: 考虑 f 沿单位向量 $\boldsymbol{l}$ 的变化率. 由 Taylor 公式有

$$f(\boldsymbol{p}_0+t\boldsymbol{l})-f(\boldsymbol{P}_0)=\frac{1}{2}\boldsymbol{l}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}t^2+o(t^2)$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的 Hesse 矩阵. 即要考虑当 t 充分小时使得 $\boldsymbol{l}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}$ 最大时 $\boldsymbol{l}$ 的方向. 由第十八章第一组参考题第 6 题中的 Raylei 商引理可知

$$\frac{\boldsymbol{l}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}}\leqslant\lambda_{\max}$$

其中 $\lambda_{\max}$ 为 $\boldsymbol{Q}$ 的最大特征值. 并且只有当 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}=\lambda_{\max}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}$ 时等号成立, 即 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的函数值增长最快的方向位于 $\boldsymbol{Q}$ 的最大特征值对应的特征子空间中. 特别的, 当最大特征

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

值对应的特征子空间为一维空间时, 相应的方向就是 f 增长最快的方向. □

2. 解答: 取 Π 的法向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{PQ}$ 正交, 则有

$$\boldsymbol{v}\cdot(x(b)-x(a),y(b)-y(a),z(b)-z(a))=0$$

由高维空间的中值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\boldsymbol{v}\cdot(x'(\xi),y'(\xi),z'(\xi))=0$$

即 $(x'(\xi),y'(\xi),z'(\xi))$ 和 $\boldsymbol{v}$ 正交, 也即 $(x'(\xi),y'(\xi),z'(\xi))$ 与 Π 平行.

注: 这里使用的是高维 Rolle 定理 (命题 21.5.2) 的推广 (可称为高维 Lagrange 定理, 证明方法与低维完全相仿). □

3. 解答: 令 $\boldsymbol{g}(x)=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}(x)$, 则由题意可知

$$\boldsymbol{g}(a)=\boldsymbol{g}(b)=0$$

由命题 21.5.2 可知存在 $\xi_1\in(a,b)$ 使得 $\boldsymbol{g}'(\xi_1)=0$. 又因为 $\boldsymbol{g}'(a)=0$, 于是又存在 $\xi_2\in(a,\xi_1)$ 使得 $\boldsymbol{g}''(\xi_2)=0$. 往复进行下去最后可以得到 $\xi\in(a,\xi_k)\subset(a,b)$ 使得

$$\boldsymbol{g}^{(k)}(\xi)=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}^{(k)}(\xi)=0$$

即 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{f}^{(k)}(\xi)$ 正交. □

4. 解答: 设三个切点为 $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3),(z_1,z_2,z_3)$, 三个切面方程为

$$A_ix+B_iy+C_iz=\delta_i,i=1,2,3 \tag{2}$$

令 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2-1$, 则

$$F_x=2ax,\quad F_y=2by,\quad F_z=2cz$$

从而曲面的切面方程为

$$2ax_ix+2by_iy+2cz_iz=\sigma_i \tag{2}$$

由于切点在曲面上, 即

$$ax_i^2+by_i^2+cz_i^2=1$$

将切点代入 (1) 可得 $\sigma_i=2$. 对比 (1)(2) 可知切面的法向量为

$$\boldsymbol{n}_i=\frac{1}{\delta_i}\begin{pmatrix}A_i\\B_i\\C_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_i\\by_i\\cz_i\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{pmatrix}=\frac{1}{\delta_i}\begin{pmatrix}A_i/a\\B_i/b\\C_i/c\end{pmatrix} \tag{3}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

把上式代入曲面方程可得

$$\frac{A_i^2}{a}+\frac{B_i^2}{b}+\frac{C_i^2}{c}=\delta_i^2$$

再设三个切面的交点是 (x_0,y_0,z_0), 则有

$$A_ix_0+B_iy_0+C_iz_0=\delta_i$$

从而

$$\sum_{i=1}^{3}(A_ix_0+B_iy_0+C_iz_0)^2=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{A_i^2}{a}+\frac{B_i^2}{b}+\frac{C_i^2}{c}\right)$$

由于 δ_i 具有任意性, 不妨令

$$\delta_i^2=\frac{1}{(ax_i)^2+(by_i)^2+(cz_i)^2}$$

则从 (3) 式可知

$$A_i^2+B_i^2+C_i^2=1$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{pmatrix}$$

因为三个切面正交, 它们的法向量也正交, 而法向量模长都是 1, 因此实方阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个正交矩阵, 它的列向量也应互相正交且模长为 1. 于是

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=\sum_{i=1}^{3}(A_ix_0+B_iy_0+C_iz_0)^2=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{A_i^2}{a}+\frac{B_i^2}{b}+\frac{C_i^2}{c}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

命题得证.

注: 本题的二维情形是一个中学解析几何的常见命题:

二次曲线 $ax^2+by^2=1$(当 $a,b>0$ 时就是椭圆) 的两条相互垂直的切线的交点位于圆 $x^2+y^2=1/a+1/b$ 上.

该命题的推广为: 与曲面 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i{}^2=1$ 相切的 n 个两两正交的超平面的交点位于球面 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}1/a_i$ 上. □

5. 解答: 曲面 Σ 在 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为 $(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$, 任取曲面 Σ 上一点 (x_0,y_0), 则法线方程为

$$\frac{x-x_0}{-f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{-f_y(x_0,y_0)}=z-f(x_0,y_0)$$

又与 z 轴相交, 则有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y_0}{f_y(x_0,y_0)}$$

由于所取点具有任意性, 这说明在曲面 Σ 上有 $xf_y=yf_x$.

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则 $z=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$$\begin{aligned}z_\theta&=-r\sin\theta f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)\\&=-yf_x+xf_y=0\end{aligned}$$

这说明 $z=f(x,y)$ 只与 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 有关, 所以 Σ 是一个旋转曲面. □

6. 解答: 令 $F(a)=e^{a-1}+a\ln a-a^2$, 则

$$F''(a)=e^{a-1}+\frac{1}{a}-2\geqslant 1+(a-1)+\frac{1}{a}-2\geqslant a+\frac{1}{a}-2\geqslant 0$$

故 $F'(a)$ 单调递增, 而 $F'(1)=0$, 所以 $F(a)$ 在 $(0,1)$ 上递减, 在 $(1,+\infty)$ 上递增, 又 $F(1)=0$, 故恒有 $F(a)\geqslant 0$, 如此我们就有

$$e^{a-1}+a\ln a+e^{b-1}+b\ln b\geqslant a^2+b^2\geqslant 2ab$$

不等式当且仅当 $a=b=1$ 时成立. □

7. 解答:

(1) 因为 $\mathrm{d}u=u_x\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}y, \mathrm{d}v=v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y$, 所以有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\left(v_x+v_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\left(u_x+u_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\qquad(*)$$

记变换前两条曲线在交点处的切线斜率为 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1,\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2$, 变换后两条曲线在交点处的切线斜率为 $\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1,\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2$, 要使交角相同即

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2}=\pm\frac{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2-\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1}{1+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2}$$

在上式右端代入 $(*)$ 式及条件 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 后可验证上式成立.

(2) 容易验证 $\eta_x=\xi_y, \eta_y=-\xi_x$, 由 (1) 的结论可知此反演变换保角.

(3) 注意到

$$(\xi^2+\eta^2)(x^2+y^2)=1$$

设任一圆的方程为

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

则经过反演变换后方程转化为

$$A\xi + B\eta + C(\xi^2 + \eta^2) + 1 = 0$$

当 $C \neq 0$ 时上述方程表示圆, 当 $C = 0$ 时上述方程表示直线.

(4)

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

(5) 将两种情况都代入 (1) 中的交角公式验证, 第一种情况使式子右边取正号 (角度同向), 第一种情况使式子右边取负号 (保持反向). □

8. 解答:

(1) 曲面间的夹角即交点处相应法线的夹角. 设反演变换前的曲面方程为

$$F_1(x,y,z) = G_1(x,y,z) = 0$$

它们的法向量是 (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}) 和 (G_{1x}, G_{1y}, G_{1z}), 反演变换后两个曲面方程为 (反解 x, y, z 的表达式)

$$F_2(\xi,\eta,\zeta) = F_1\left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \frac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right) = 0$$

$$G_2(\xi,\eta,\zeta) = G_1\left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \frac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right) = 0$$

变换前后各偏导数的关系为

$$(F_{2\xi}, F_{2\eta}, F_{2\zeta}) = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z})\boldsymbol{J}, \qquad (G_{2\xi}, G_{2\eta}, G_{2\zeta}) = (G_{1x}, G_{1y}, G_{1z})\boldsymbol{J}$$

其中

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\eta^2+\zeta^2-\xi^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & -\dfrac{2\xi\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & -\dfrac{2\xi\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} \\ -\dfrac{2\eta\xi}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & \dfrac{\xi^2+\zeta^2-\eta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & -\dfrac{2\eta\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} \\ -\dfrac{2\zeta\xi}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & -\dfrac{2\zeta\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} & \dfrac{\xi^2+\eta^2-\zeta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2} \end{pmatrix}$$

特别注意到一个性质

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\boldsymbol{E}_3$$

设变换前曲面夹角 θ_1, 变换后曲面夹角 θ_2, 记 $\boldsymbol{\alpha} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}), \boldsymbol{\beta} = (G_{1x}, G_{1y}, G_{1z})$, 则有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\cos\theta_2=\frac{(\boldsymbol{\alpha J})\cdot(\boldsymbol{\beta J})^{\mathrm{T}}}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha J})(\boldsymbol{\alpha J})^{\mathrm{T}}}\cdot\sqrt{(\boldsymbol{\beta J})(\boldsymbol{\beta J})^{\mathrm{T}}}}=\frac{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}}$$
$$=\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}}=\cos\theta_1$$

这就证明了该反演变换保角.

注: 类似可证如此定义的 n 维反演变换都是保角的.

(2) 注意到

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(x^2+y^2+z^2)=1$$

设任一球面方程为

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

则经过反演变换后方程转化为

$$A\xi+B\eta+C\zeta+D(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+1=0$$

当 $D\neq0$ 时上述方程表示球面, 当 $D=0$ 时上述方程表示平面.

注: 命题可以推广为: n 维球面经过 n 维反演变换后是一个 n 维球面或者是一个 $n-1$ 维超平面.

(3)

$$\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & -\dfrac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\\ -\dfrac{2yx}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \dfrac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & -\dfrac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\\ -\dfrac{2zx}{(x^2+y^2+z^2)^2} & -\dfrac{2zy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \dfrac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^6}\begin{vmatrix}y^2+z^2-x^2 & -2xy & -2xz\\ -2yx & x^2+z^2-y^2 & -2yz\\ -2zx & -2zy & x^2+y^2-z^2\end{vmatrix}=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

注: 最后的化简技巧和练习题 20.3.3 第 13 题类似, 还可以得知 n 维反演变换的 Jacobi 行列式为 $-(x^2+y^2+z^2)^{-n}$.

对比第 7 题和第 8 题可知, 在二维情形中, 保角变换 (在复变函数论中称之为共形映射) 和 Cauchy-Riemann 方程等价, 但在三维情形中并找不到类似的关系. 事实上, 从微分几何的角度来解释, 在三维情形中两个曲面之间的变换是保角变换的充要条件是第一基本形式成比例. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第二十二章 重积分

§22.1.3 思考题 学员: d39

1. 解答: 与一元定积分类似.

前半问: 用 D^* 表示不连续点集, 则由题设 $D^*(f)$ 和 $D^*(g)$ 都是零测集, 从而 $D^*(f)\cup D^*(g)$ 是零测集. 而 $D^*(f\cdot g)\subset D^*(f)\cup D^*(g)$, 所以 $D^*(f\cdot g)$ 是零测集, 由命题 22.1.1 可知 $f\cdot g$ 可积.

后半问: 注意到 $D^*(f)=D^*(1/f)$, 显然 $1/f$ 可积. □

2. 解答: 前半问与练习题 10.1.3 第 6 题类似, 后半问的反例与练习题 10.1.3 第 2 题类似. □

3. 解答: 与练习题 10.1.3 第 4 题类似. □

4. 解答:

(1) 函数 f 在 $[-1,1]^2$ 中的四个点 $(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)$ 上无定义. 但这 4 个点组成的集合为零面积集. 补充定义 f 在这 4 个点上的值 (取任意实数), f 在 $[-1,1]^2$ 上是有界的, 其不连续点集为上述 4 个点, 它是零面积集, 当然也是零测集, 所以 f 在 $[-1,1]^2$ 上可积.

(2) 函数 f 在抛物线的一段 $l=\{(x,x^2)|0\leqslant x\leqslant 1\}$ 上无定义. 由立体 22.1.1 可知 l 是零面积集, 于是可在 l 上补充定义 (取任意实数), 使 f 在 $[0,1]^2$ 上保持有界, 则 f 在 $[0,1]^2$ 上的不连续点集为 l, 它是零面积集, 当然也是零测集, 所以 f 在 $[0,1]^2$ 上可积. □

§22.1.4 练习题 学员: d39

1. 解答: 注意到

$$\max\{f,g\}=\frac{f+g+|f-g|}{2}$$

由 f 和 g 可知 $\max\{f,g\}$ 也是可积的. □

2. 解答: 由积分中值定理可知

$$\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\rho^2 f(\xi,\eta)$$

其中点 (ξ,η) 处于圆盘 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2$ 内. 显然当 $\rho\to 0$ 时 $(\xi,\eta)\to\boldsymbol{p}_0$, 于是根据 f 的连续性可知

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\rho\to 0} f(\xi,\eta)=f(\boldsymbol{p}_0)$$

□

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

3. 解答: 作变换 $x+y=u, y-x=v$ 或 $x=\dfrac{u+v}{2}, y=\dfrac{u-v}{2}$, 则有 $|J|=\dfrac{1}{2}$, 且 u 从 -1 变到 1, v 从 -1 变到 1, 于是

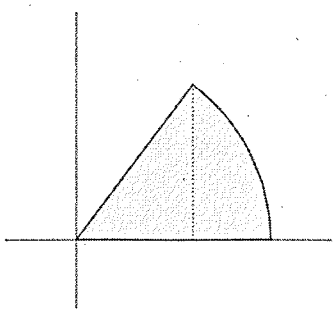
$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u \qquad \square$$

4. 解答: 作变换 $xy=u, y/x=v$. 则 D 变为 $D'=\{1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4\}$, 且 $|J|=\dfrac{1}{2v}$,

$$\iint\limits_{D} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{1}^{4}\frac{\mathrm{d}v}{2v}\int_{1}^{2}f(u)\mathrm{d}u=\ln 2\int_{1}^{2}f(u)\mathrm{d}u \qquad \square$$

§22.2.4　练习题　学员: d39

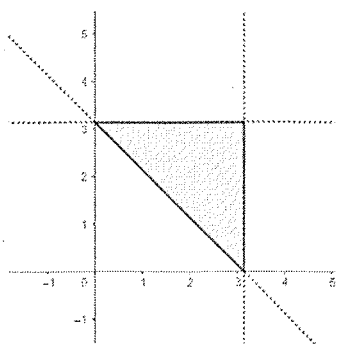
1. 解答: 积分区域如图所示



$$\begin{aligned} I&=\int_{0}^{R/\sqrt{1+R^2}}\mathrm{d}x\int_{0}^{Rx}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{R/\sqrt{1+R^2}}^{R}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y\\ &=\int_{0}^{R^2/\sqrt{1+R^2}}\mathrm{d}y\int_{y/R}^{R^2/\sqrt{1+R^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{0}^{R^2/\sqrt{1+R^2}}\mathrm{d}y\int_{R/\sqrt{1+R^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}x \end{aligned} \qquad \square$$

2. 解答: $\displaystyle\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\mathrm{d}t\int_{0}^{t}f(t)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}tf(t)\mathrm{d}t$ $\square$

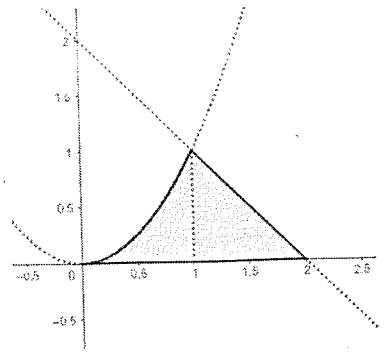
3. 解答: 积分区域如图所示



内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi-x}\mathrm{d}y\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x = 2$$ □

4. 解答: 积分区域如图所示

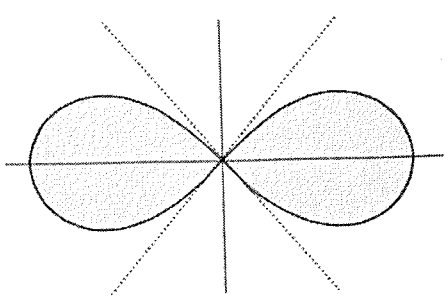


$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1\left(\frac{x^6}{3}+x^4\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 -\frac{4}{3}\left(x^3-3x^2+3x-2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{26}{105}+1 = \frac{131}{105} \end{aligned}$$ □

5. 解答: 记 D 是双扭线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 围成的区域. 即求

$$I = \iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分区域如图所示

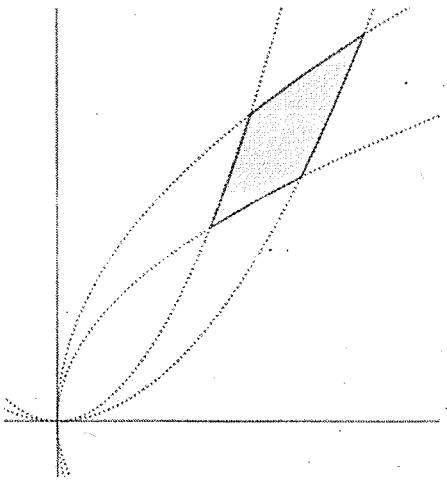


令 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, 则

$$\begin{aligned} &\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^a \mathrm{d}r\int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} r^3\cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi \\ =&2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3\cos 2\varphi\mathrm{d}r = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4\cos^3 2\varphi}{4}\mathrm{d}\varphi = \frac{a^4}{3} \end{aligned}$$ □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

6. 解答: 积分区域如图所示



令 $u=x^2/y, v=y^2/x$, 则 $xy=uv$, 区域变为 $D'=\{(u,v)|a\leqslant u\leqslant b, p\leqslant v\leqslant q\}$, 这时

$$|J^{-1}|=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 2x/y & -x^2/y^2 \\ -y^2/x^2 & 2y/x \end{vmatrix}=3\Rightarrow |J|=\frac{1}{3}$$

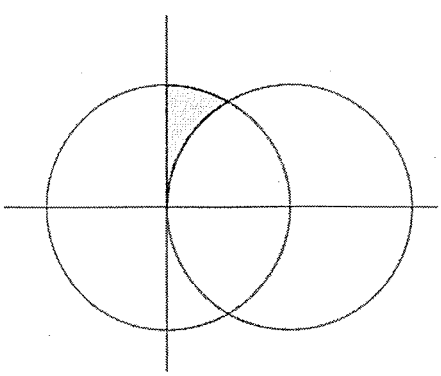
于是

$$\iint\limits_D \frac{x^2\sin xy}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}u\int_p^q \frac{1}{3}u\sin uv\mathrm{d}v=\frac{\sin bp-\sin ap}{3p}-\frac{\sin bq-\sin aq}{3q} \qquad \square$$

7. 解答: 交换积分次序可知

$$\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^y (y-x)^n f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b (y-x)^n\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b f(x)\left[\frac{(y-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_x^b\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int_a^b (b-x)^{n+1}f(x)\mathrm{d}x \qquad \square$$

8. 解答: 积分区域如图所示



令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{2a\cos\theta}^{a} r^2\mathrm{d}r = \frac{\pi}{18}a^3 + \left(\sqrt{3}-\frac{16}{9}\right)a \qquad \square$$

9. 解答: 设围成区域为 D. 令 $u=x+y, v=y/x$, 则 $p\leqslant u\leqslant q, a\leqslant v\leqslant b$, 此时

$$|J^{-1}| = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = \frac{x+y}{x^2} = \frac{(v+1)^2}{u} \Rightarrow |J| = \frac{u}{(1+v)^2}$$

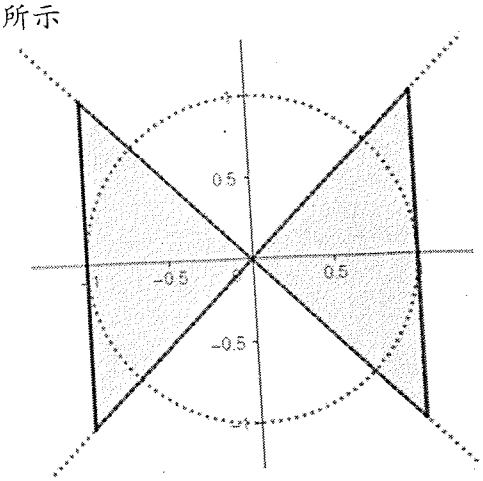
于是

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_p^q u\mathrm{d}u \int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(b-a)\left(q^2-p^2\right)}{(1+a)(1+b)} \qquad \square$$

10. 解答: 设围成区域为 D. 令 $x=ar\cos^8\varphi, y=br\sin^8\varphi$, 则方程化为 $r=1, 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 于是

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_D 8abr\cos^7\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi = 4ab\int_0^1 u^7\left(1-u^2\right)^3\mathrm{d}u \\ &= 4ab\int_0^1\left(u^7-3u^9+3u^{11}-u^{13}\right)\mathrm{d}u = 4ab\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{14}\right) = \frac{ab}{70} \end{aligned} \qquad \square$$

11. 解答: 积分区域如图所示

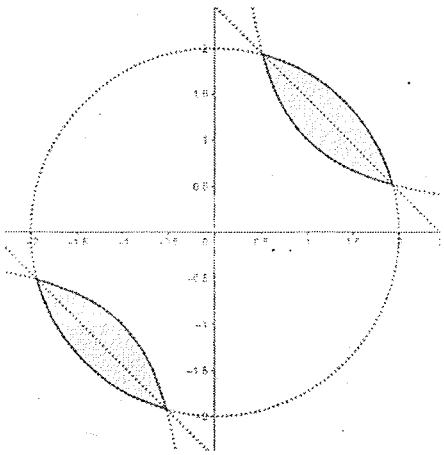


令 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, 则

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ =&2\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi + 4\int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi \\ =&\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r + \int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)\mathrm{d}r \end{aligned} \qquad \square$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

12. 解答: 积分区域如图所示



易解得四个交点坐标, 于是有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\mathrm{d}x\int_{1/x}^{\sqrt{4-x^2}}x\mathrm{d}y+\int_{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}^{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{1/x}x\mathrm{d}y\\ &=\int_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x\sqrt{4-x^2}-1)\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}^{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}(x\sqrt{4-x^2}+1)\mathrm{d}x\\ &=\left(\int_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\int_{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}^{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

注: 最后一步利用了定积分偶倍奇零的性质. □

13. 解答: 由题设有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\\ \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\end{aligned}$$

二式相加可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]\\ &=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]\end{aligned}$$

另外有

$$|J|=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

显然就有

$$\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_\Omega \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

得证. □

14. 解答: 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则

$$\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{4-y^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pi$$ □

15. 解答: 由于

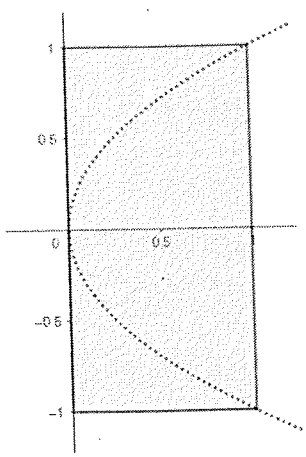
$$|xy|\leqslant\frac{(|x|+|y|)^2}{4}$$

故

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(\sqrt{|xy|}+|xy|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\cdot 2=\frac{3}{2}$$

注: 最后一个等号是根据几何意义计算积分区域面积得到的. □

16. 解答: 积分区域如图所示

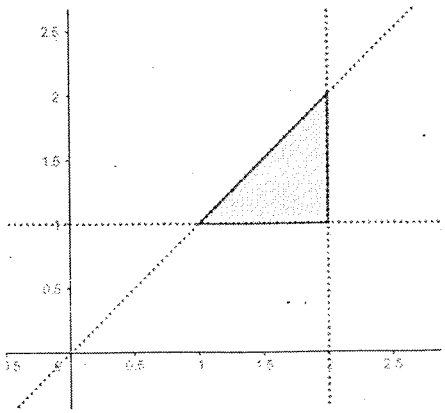


可将积分区域按 $x=y^2$ 进行分割, 于是

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(x-y^2)\mathrm{d}y+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-1}^{-\sqrt{x}}(y^2-x)\mathrm{d}y\\&=\frac{8}{15}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{11}{15}\end{aligned}$$ □

17. 解答: 积分区域如图所示

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。



$$\iint\limits_D \ln\frac{x}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x \ln\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y = \int_1^2 [2(x-1)-(x+1)\ln x]\mathrm{d}x = \frac{11}{4} - 4\ln 2 \qquad \square$$

§22.3.5　练习题　学员: d39

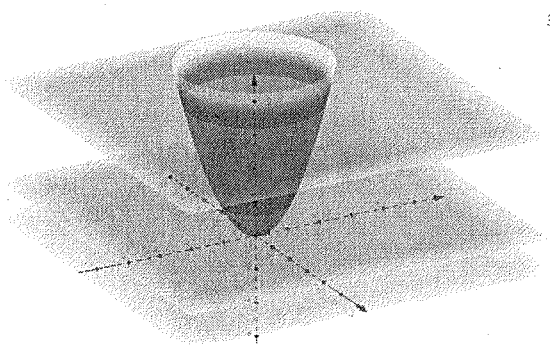
1. 解答:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}z \int_0^{1-z-x} (1-y)e^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y \\
=&\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \mathrm{d}z \int_0^{1-y-z} (1-y)e^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}x \\
=&\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} (1-y)(1-y-z)e^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}z \\
=&\int_0^1 \frac{1}{2}(1-y)[1-e^{-(y-1)^2}]\mathrm{d}y = \frac{1}{4e}
\end{aligned} \qquad \square$$

2. 解答:

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 \mathrm{d}y \int_0^x f(x,y,z)\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \mathrm{d}\rho \int_0^{\rho\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}z \qquad \square$$

3. 解答: 旋转曲面方程为 $x^2+y^2=2z$, 由 $z=2$ 和 $z=8$ 截取部分在 Oxy 平面上的投



内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

影分别为圆盘 $x^2+y^2\leqslant 4$ 和 $x^2+y^2\leqslant 16$, 则有

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=&\iint_{x^2+y^2\leqslant 16}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{8}(x^2+y^2)\mathrm{d}z-\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}z\\
=&\iint_{x^2+y^2\leqslant 16}(x^2+y^2)(8-(x^2+y^2)/2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+y^2)(2-(x^2+y^2)/2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4 r^2(8-r^2/2)r\mathrm{d}r-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2(2-r^2/2)r\mathrm{d}r\\
=&\frac{1024}{3}\pi-\frac{16}{3}\pi=336\pi
\end{aligned}$$

□

4. 解答: 积分区域可参考例题 22.3.1(取 $R=2$). 固定 z 时, 记

$$\begin{aligned}
\Omega_1&=\{(x,y):x^2+y^2=4-z^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}\\
\Omega_2&=\{(x,y):x^2+y^2=4z-z^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_1^2 z\mathrm{d}z\iint_{\Omega_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint_{\Omega_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_1^2 z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{4z-z^2}}r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\\
&=\frac{1}{8}\int_1^2 z(4-z^2)^2\mathrm{d}z+\frac{1}{8}\int_0^1 z(4z-z^2)^2\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{77}{30}=\frac{53}{60}
\end{aligned}$$

□

5. 解答: 记固定点为 (a,b,c). 由积分中值定理, 有

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}&=\iint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{(\xi-u)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

其中 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$. 显然函数 r 在球内最小的距离为 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R$, 最大值是 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R$, 并且只在一个点达到最小值, 也只在一个点达到最大值, 因此, 函数 $1/r$ 在球内最大值是 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}$, 最小值是 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}$, 并且只在一个点达到最小值, 也只在一个点达到最大值. 我们证明 r 的中值不是最大值也不是最小值, 事实上, 例如是最大值, 则

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-R}}-\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

但在球内被积函数连续且非负, 故必有

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-R}}=\frac{1}{r}$$

这是不可能的. 因此有

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+R}}<\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}<\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-R}}$$
$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R<\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}<\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R$$

这说明

$$\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\xi-c)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R$$

其中 $|\theta|<1$. 于是

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R}$$

□

6. 解答: 球坐标变换后可知 $\varphi\in[0,\pi/2],\theta\in[0,\pi/2]\cup[\pi,3\pi/2]$, 代入曲面方程, 可得

$$\rho^2=a^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta$$

于是 $\rho\in[0,a\sin\varphi\sqrt{\cos\theta\sin\theta}]$. 由奇偶性

$$\begin{aligned}I&=\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\varphi\sqrt{\cos\theta\sin\theta}}\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{96}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{144}a^4\end{aligned}$$

□

7. 解答: 利用四维球坐标变换 (参考例题 22.3.5), 令

$$\begin{aligned}x&=r\cos\psi\\y&=r\sin\psi\cos\varphi\\z&=r\sin\psi\sin\varphi\cos\theta\\u&=r\sin\psi\sin\varphi\sin\theta\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

此时

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z,u)}{\partial(r,\psi,\varphi,\theta)}\right| = r^3\sin^2\psi\sin\varphi$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^3\sin^2\psi\sin\varphi\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^3\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi^2}{16}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^2\mathrm{d}r^2 = \frac{\pi^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t-\sin^2 t\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

注: 也可用双极坐标计算, 参见裴礼文 P901 例 7.2.37. □

8. 解答: 作球坐标变换得

$$\begin{aligned} F(t) &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant x^2} f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\mathrm{d}r \end{aligned}$$

□

于是 $F'(t)=4\pi t^2 f(t^2)$. 令 $t=1$ 得 $F'(1)=4\pi$.

9. 解答: 球坐标变换后可知 $\varphi\in[0,\pi/4],\theta\in[0,2\pi),\rho\in[2,4]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \frac{\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_2^4\rho^3\sin\varphi\mathrm{d}\rho}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_2^4\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho} \\ &= \frac{\int_2^4\rho^3\mathrm{d}\rho}{\int_2^4\rho^2\mathrm{d}\rho} = \frac{45}{14} \end{aligned}$$

□

10. 解答: 令 $u=xy, v=y/x, w=z$, 则 $1\leqslant u\leqslant 2, 3\leqslant v\leqslant 4, 0\leqslant w\leqslant x^2+y^2=uv+u/v$.

$$|J^{-1}| = \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right| = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ -y/x^2 & 1/x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v$$

$$I = \int_1^2\mathrm{d}u\int_3^4\mathrm{d}v\int_0^{uv+u/v}\frac{u^2w}{2v}\mathrm{d}w = \frac{983}{180}+\frac{31}{10}\ln\frac{4}{3}$$

□

□

11. 解答: 本章第一组参考题第 5 题的特例.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§22.4.4　练习题　学员: d39

1. 解答:

(1) 由于被积函数是正的, 并且关于 Ox 轴和 Oy 轴都对称, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}=4\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}\right)\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+y^q}\right)$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\dfrac{1}{1+x^p}=1$, 故积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛, $p<1$ 时发散, $p=1$ 时显然也发散. 因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}=\begin{cases}\text{有限数}, & p>1\\ +\infty, & p\leqslant 1\end{cases},\quad \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^q}=\begin{cases}\text{有限数}, & q>1\\ +\infty, & q\leqslant 1\end{cases}$$

由此可知原积分当且仅当 $p>1, q>1$ 时收敛.

(2) 由对称性及被积函数的对称性

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0;y\geqslant 0\\ x+1\geqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$$

简记为 $I=I_1+I_2$. 其中

$$\Omega_1=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\leqslant 2\}$$
$$\Omega_2=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,x^p+y^q\geqslant 2\}$$

令 $\Omega_3=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\geqslant 2\}$, 反证易知当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^p+y^q\geqslant 2$ 时必有 $x+y\geqslant 1$. 故 $\Omega_2=\Omega_3$. 由于 Ω_1 是有界闭集, 故 I_1 不是广义积分, 因此 I_2 和 I_3 敛散性相同, 只需考虑 I_3 的敛散性. 在 I_3 中令 $x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta$, $y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta$, 则易知

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$$

当 $p,q>0$ 时

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)$$

恒收敛. 而 $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$ 当 $\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{q}-3<-1$ 时收敛, 当 $\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{q}-3\geqslant -1$ 时发散.

综上可知, 原广义积分只有在 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}<1$ 时收敛.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(3) 记积分为 I. 先设 $p<1$, 令

$$\Omega_n=\{(x,y)|1\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi\}$$
$$\Omega_n'=\left\{(x,y)|1\leqslant x+y\leqslant 2n\pi-\frac{\pi}{4},-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi\right\}$$
$$\omega_n=\left\{(x,y)|2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi\right\}$$

其中 $n=1,2,\cdots$. 显然有

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_m}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n/\Omega_{n'}}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

令 $u=x+y,v=x-y$, 则 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=-\dfrac{1}{2}$, 得

$$\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^\rho}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_{2\pi\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\mathrm{d}u\int_{-2n\pi}^{2\pi\pi}\frac{\cos v-\cos u}{u^p}\mathrm{d}v=-n\pi\int_{2n\pi}^{2\pi\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u$$

而

$$\int_{2\pi\pi-\frac{\pi}{4}}^{2\pi\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2\pi\pi\frac{\pi}{4}}^{2\pi\pi}\frac{\mathrm{d}u}{u^p}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{(2n\pi)^p}, & p>0\\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}, & p\leqslant 0\end{cases}$$

由 $p<1$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\infty$$

矛盾.

又若 $p\geqslant 1$, 令

$$\omega_n'=\left\{(x,y)|2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2\pi n^{[p]+2}\leqslant x-y\leqslant 2\pi n^{[p]+2}\right\}$$

仿上应有

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

但令 $u=x+y,v=x-y$ 后有

$$\iint_{\Omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi n^{[p]+2}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u$$

但

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}\mathrm{d}u\geqslant\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(2n\pi)^p}$$

可知

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\infty$$

矛盾.

综上可知, 原广义积分始终是发散的. □

2. 解答: 先假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在, 则 $\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 一定存在上确界 M.

依定义, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N$ 使得

$$\iint\limits_{D_N}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>M-\varepsilon$$

于是对充分大的 $D_n\supset D_N$ 有

$$M-\varepsilon<\iint\limits_{D_N}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant M<M+\varepsilon$$

则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛且

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

反之, 若 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛, 则对任意 $D_n\subset D$, 存在 N 使得 $D_n\subset D_N\subset D$, 从而

$$0\leqslant\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D_N}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty$$

由单调有界原理, $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在且它的值为它的上确界 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. □

3. 解答:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2}&=2\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{y}{x^2}\Big|_{x^2+1}^{+\infty}\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x^2+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x\\&=-2\int_0^{+\infty}\arctan\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}\frac{1}{x}\end{aligned}$$

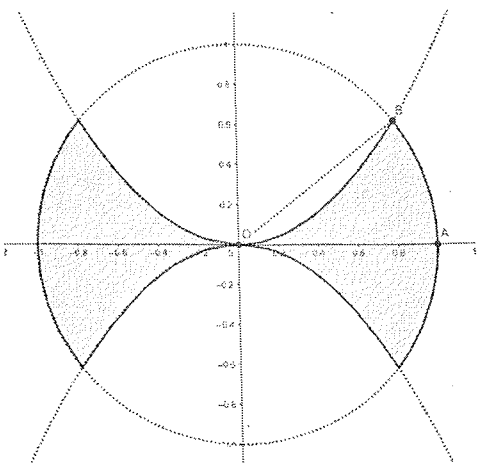
内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$= -\frac{2}{x}\arctan\frac{x^2}{x^2+1}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}}{1+\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2+x^4} = 4\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^4+2x^2+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$ □

4. 解答:

(1) 积分区域如图所示



由极坐标变换有

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 4\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^1\frac{\mathrm{d}r}{r} = 4\int_0^{\alpha}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

其中 α 是 $\angle AOB$ 的大小. 由于

$$\lim_{\theta\to 0^+}\theta^{\frac{1}{2}}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to 0^+}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\theta\cdot\frac{\ln\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}{\left(\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

故积分 $\displaystyle\int_0^{\alpha}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$ 收敛, 从而原积分收敛.

(2) 由极坐标变换有

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^p} = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}$$

其中 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}$ 为常义积分而

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-p)}, & p<1 \\ +\infty, & p\geqslant 1 \end{cases}.$$

由此可知当 $p<1$ 时原积分收敛, 当 $p\geqslant 1$ 时原积分发散.

注: 推广结论可见吉米多维奇第六册第 4182 题.

(3) 由极坐标变换有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^p} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^p}\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{(1-r)^p(1+r)^p}$$

由于

$$\lim_{r\to 1^-}(1-r)^p\frac{r}{(1-r)^p(1+r)^p} = 2^{-p}$$

故 $\displaystyle\int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{(1-r)^p(1+r)^p}$ 当 $p<1$ 时收敛, 当 $p\geqslant 1$ 时发散. 原积分也如此.

注: 推广结论可见吉米多维奇第六册第 4185 题. □

5. 解答: 记内层函数 $F(x)=\displaystyle\int_b^B \frac{\mathrm{d}y}{|f(x)-y|^p}, a\leqslant x\leqslant A$

(1)$p<1$ 时, 对每个固定的 $x\in[a,A]$, 如果 $f(x)\in[b,B]$, 此时 $F(x)$ 是瑕积分, 瑕点为 $f(x)$, 而由于 $p<1$, 故 $F(x)$ 收敛; 又如果 $f(x)\notin[b,B]$, 则 $F(x)$ 是常义积分. 总之 $F(x)$ 点点收敛. 可证 $F(x)$ 在 $[a,A]$ 上连续 (步骤过于冗长, 具体证明参见吉米多维奇第六册第 4186 题), 故可知 $\displaystyle\int_a^A F(x)\mathrm{d}x$ 总是收敛的.

(2)$p\geqslant 1$ 时, 对每个固定的 $x\in[a,A]$, 如果 $f(x)\in[a,b]$, 则因为 $p\geqslant 1$, 此时瑕积分 $F(x)$ 点点发散到正无穷, 则 $\displaystyle\int_a^A F(x)\mathrm{d}x$ 必然发散; 又如果 $f(x)\notin[a,b]$, 则 $F(x)$ 是常义积分. 此时 $|f(x)-y|^{-p}$ 在 $[b,B]$ 上关于 y 连续, 必然有最值, 设 $m\leqslant|f(x)-y|^{-p}\leqslant M, y\in[b,B]$ 则

$$\frac{1}{|f(x)-y|^p} = \frac{1}{|f(x)-y|^{p-0.5}}\cdot\frac{1}{|f(x)-y|^{0.5}} \leqslant \frac{M^{p-0.5}}{|f(x)-y|^{0.5}}$$

由 (1) 的结论及比较判别法就可知 $\displaystyle\int_a^A F(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的. □

6. 解答:

(1) 由极坐标变换

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}r = -2\pi\int_0^1 r\ln r\mathrm{d}r$$

$$= -2\pi\left(\frac{r^2}{2}\ln r\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{r}{2}\mathrm{d}r\right) = \frac{\pi}{2}$$

(2) 令 $x=u+v, y=u-v$, 则 $|J|=-2$ 且积分区域 D' 为 $u=v, v=0, u+v=\pi$ 所围,

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

于是

$$\begin{aligned}
&\iint_D \ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D \ln\sin 2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_0^{\pi-v}\ln\sin 2v\mathrm{d}u\\
=&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin 2v\mathrm{d}v = 2\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\mathrm{d}v + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v\mathrm{d}v\\
&+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\cos v\mathrm{d}v\\
=&\pi^2\ln 2 - \frac{\pi^2}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v\mathrm{d}v + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\ln\sin t\mathrm{d}t\\
=&\frac{\pi^2}{2}\ln 2 + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin v\mathrm{d}v\\
=&\frac{\pi^2}{2}\ln 2 + 2\pi\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

注: 最后利用了例题 12.3.4 的结论. □

§22.5.4 练习题 学员: d39

1. 解答:

(1) 由题设可知

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

令 $u = a_1x + b_1y + c_1z, v = a_2x + b_2y + c_2z, w = a_3x + b_3y + c_3z$, 则 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \dfrac{1}{\Delta}$, 区域变为 $-h_1 \leqslant u \leqslant h_1, -h_2 \leqslant v \leqslant h_2, -h_3 \leqslant w \leqslant h_3$, 则所围立体体积为

$$V = \int_{-h_1}^{h_1}\mathrm{d}u\int_{-h_2}^{h_2}\mathrm{d}v\int_{-h_3}^{h_3}\frac{1}{|\Delta|}\mathrm{d}w = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$$

(2) 记曲面围成区域为 Ω, 易知 $z \geqslant 0$ 且由对称性 (关于 yOz, zOx 平面对称) 和球坐标变换可知 (从 $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3z \Rightarrow r = a\sqrt[3]{\cos\varphi}$)

$$V = 4\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}} r^2\sin\varphi\mathrm{d}r = \frac{1}{3}\pi a^3$$

(3) 记曲面区域为 Ω, 令 $x = ar\sin\varphi\cos\theta, y = br\sin\varphi\sin\theta, z = cr\cos\varphi$, 则有

$$|J| = abcr^2\sin\varphi$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

从

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\Rightarrow r=\sin\varphi$$

由对称性可知

$$V=8\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sin\varphi}abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi^2}{4}abc$$

(4) 记曲面围成区域为 Ω, 球坐标后可从

$$(x^2+y^2)^2+z^4=z\Rightarrow r^3=\frac{\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}$$

易知 $z\geqslant 0$, 由对称性 (关于 yOz,zOx 平面对称) 可知

$$V=4\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\left(\frac{\cos\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\right)^{1/3}}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi^2}{6}$$ □

2. 解答:

(1) 由对称性, 只考虑第一卦限. 令 $x=r\cos\theta\sin\varphi,y=r\sin\theta\sin\varphi,z=r\cos\varphi$ 可得 $r^2=\sin^2\varphi\cos 2\theta$, 于是曲面参数方程为

$$\begin{cases}x=\sin^2\varphi\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}\\ y=\sin^2\varphi\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}\\ z=\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{\cos 2\theta}\end{cases}$$

计算得 □

$$E=\cos 2\theta,F=-\sin\varphi\cos\varphi\sin 2\theta,G=\sin^2\varphi\left[\sin^2\varphi+\sin^2(2\theta)\cos^2\varphi\right]/\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow\sqrt{EG-F^2}=\sin^2\varphi$$

区域为 $D=\{(\theta,\varphi):0<\varphi<\pi/2,0<\theta<\pi/4\}$, 于是

$$S=8\iint\limits_{D}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\iint\limits_{D}\sin^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi^2}{2}$$

(2) 令 $x=r\cos\theta\sin\varphi,y=r\sin\theta\sin\varphi,z=r\cos\varphi$ 可得 $r=\cos^3\varphi$, 曲面参数方程为

$$\begin{cases}x=\sin\varphi\cos^3\varphi\cos\theta\\ y=\sin\varphi\cos^3\varphi\sin\theta\\ z=\cos^4\varphi\end{cases}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

计算得

$$E=\cos^6\varphi+9\sin^2\varphi\cos^4\varphi, F=0, G=\left(\cos^2\varphi+9\sin^2\varphi\right)\sin^2\varphi\cos^{10}\varphi$$

区域为 $D=\{(\theta,\varphi):0<\theta<2\pi, 0<\varphi<\pi/2\}$, 于是

$$S=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\cos^2\varphi+9\sin^2\varphi\right)\sin^2\varphi\cos^{10}\varphi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{313}{560}\pi \quad \square$$

(3) 由于上半旋转面方程为 $z=\sqrt{f^2(x)-y^2}$, 因此

$$z_x=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}, z_y=\frac{-y}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\Rightarrow\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{\frac{f^2(x)+f^2(x)f'^2(x)}{f^2(x)-y^2}}$$

于是

$$\begin{aligned}S&=2\int_a^b\mathrm{d}x\int_{-f(x)}^{f(x)}\sqrt{\frac{f^2(x)+f^2(x)f'^2(x)}{f^2(x)-y^2}}\mathrm{d}y\\&=4\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}f(x)\sqrt{\frac{1+f'^2(x)}{1-y^2f^{-2}(x)}}\mathrm{d}\left(yf^{-1}(x)\right)\\&=4\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-t^2}}\\&=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f^2(x)}\mathrm{d}x\end{aligned} \quad \square$$

3. 解答: 抛物面壳 Σ 在 xOy 平面内的投影区域为 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 2\}$, 而

$$z_x=x, z_y=y\Rightarrow\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故

$$\begin{aligned}M&=\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}r\mathrm{d}r\xlongequal{r^2=t}\pi\int_0^2 t\sqrt{1+t}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^2(1+t-1)(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+t)\\&=\frac{\pi}{2}\int_1^3\left(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^3=\frac{2}{15}\pi(6\sqrt{3}+1)\end{aligned} \quad \square$$

4. 解答: 以圆盘所在平面建立 xOy 坐标系, 再以细棒所在的一边为 z 轴, 由对称性可知 $F_x=F_y=0$. 在圆盘上任取一点 $(x,y,0)$ 作代表点, 在此处取一任意小的面积元 $\mathrm{d}S$, 则质量为 $\mu\mathrm{d}S$. 在细棒上任取一点 $(0,0,z)$ 为代表点, 在此处取一任意小的长度元 $\mathrm{d}s$, 质

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

量为 $\rho \mathrm{d}s$. 根据万有引力公式, 圆盘对细棒的引力的 z 分量为

$$\mathrm{d}z = \frac{G\mu \mathrm{d}S\rho \mathrm{d}s(0-z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

记圆盘所占区域为 A, 细棒所占为 B, 记 $\Omega = A \times B$, 则

$$\begin{aligned} F_z &= \iiint_{\Omega} \frac{G\mu \mathrm{d}S\rho \mathrm{d}s(0-z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= -G\mu\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R r\mathrm{d}r \int_a^{a+l} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \mathrm{d}z \\ &= 2\pi G\mu\rho \left[\sqrt{R^2+(a+l)^2} - \sqrt{R^2+a^2} - l\right] \end{aligned}$$

其中 G 为引力常量. □

5. 解答: 记大圆区域为 $S_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant a^2\}$, 小圆区域为 $S_2 = \{(x,y) : (x-a/2)^2 + y^2 \leqslant a^2/4\}$, $S = S_1 - S_2$, 由题意密度函数 $\mu(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$\begin{aligned} M(0) &= \iint_S \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_1-S_2} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r^2\mathrm{d}r - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} r^2\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{9}a^3 = \frac{2}{9}a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x(1) &= \iint_S x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_1-S_2} x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r^3\cos\theta\mathrm{d}r - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} r^3\cos\theta\mathrm{d}r \\ &= -\frac{4}{15}a^4 \end{aligned}$$

故

$$X_c = \frac{M_x(1)}{M(0)} = -\frac{6}{5}a$$

并且由对称性可知 $Y_c = 0$, 故重心坐标为 $\left(-\frac{6}{5}a, 0\right)$. □

6. 解答: 反证重心 $\boldsymbol{P}_0$ 不在凸形物体 Ω 内部, 记 $\boldsymbol{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, 则存在一个超平面分离 $\{\boldsymbol{x}_0\}$ 和 Ω, 或者存在 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0, \forall \boldsymbol{x} \in \Omega$$

(这是凸集的可分离性质, 也是 Hahn-Banach 定理的几何形式, 具体详情参见 Brezis 第一章引理 1.3)

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

不妨设 $M(0)=\int\limits_{\Omega}\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1$, 记 $M_x(1)=(M_{x_1}(1),M_{x_2}(1),\cdots,M_{x_n}(1))$, 则

$$\boldsymbol{x}_0=\frac{M_x(1)}{M(0)}=\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

而

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0$$

导致矛盾. 因此重心 $\boldsymbol{P}_0$ 一定在凸形物体 Ω 内部. □

7. 解答: 当 $m=1$ 时不等式显然成立. 现在假设 $m=n$ 时不等式成立, 即当 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{p_i}=1$ 时成立

$$\iint\limits_{\Omega}u_1\cdots u_n\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\|u_1\|_{p_1}\cdots\|u_n\|_{p_n}$$

则当 $m=n+1$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\dfrac{1}{p_i}=1$ 时

$$\iint\limits_{\Omega}u_1\cdots u_{n-1}(u_nu_{n+1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\|u_1\|_{p_1}\cdots\|u_nu_{n+1}\|_{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}$$

又由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega}|u_nu_{n+1}|^{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&\leqslant\|u_n^{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}\|_{\frac{p_n+p_{n+1}}{p_{n+1}}}\|u_{n+1}^{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}\|_{\frac{p_n+p_{n+1}}{p_n}}\\&=\|u_n\|_{p_n}^{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}\|u_{n+1}\|_{p_{n+1}}^{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}\end{aligned}$$

可推出

$$\|u_nu_{n+1}\|_{\frac{1}{p_n^{-1}+p_{n+1}^{-1}}}\leqslant\|u_n\|_{p_n}\|u_{n+1}\|_{p_{n+1}}$$

于是就得到了

$$\iint\limits_{\Omega}u_1\cdots u_{n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\|u_1\|_{p_1}\cdots\|u_n\|_{p_{n+1}}$$

由数学归纳法原不等式得证. □

8. 解答:

$$\begin{aligned}&\int_a^b\mathrm{d}x\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]^2=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_d^c\mathrm{d}y\int_a^b\left[f(x,y)\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\overset{\text{Cauchy}}{\leqslant}\int_c^d\left[\int_a^b f^2(x,y)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

整理即有

$$\left\{\int_a^b dx\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]^2\right\}^{1/2} \leqslant \int_c^d \mathrm{d}y\left[\int_a^b f^2(x,y)\mathrm{d}x\right]^{1/2}$$

原不等式得证. □

§22.6.2 参考题 学员: d39

第一组参考题 学员: d39

1. 解答: 我们证明 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 内的有理点和无理点 (x_0,y_0) 处都连续.
此时 $f(x_0,y_0)=0$. 对任给的 $\varepsilon>0$, 不大于 $2/\varepsilon$ 的正整数只有有限个, 故使得 $1/q_x\geqslant\varepsilon/2$ 以及 $1/q_y\geqslant\varepsilon/2$ 的有理数 $x=p_x/q_x$ 和 $y=p_y/q_y$ 也只有有限个, 取 (x_0,y_0) 附近充分小的邻域, 可使得这有限个点都在邻域外, 而在邻域内的任意点 (x,y) 满足 $1/q_x<\varepsilon/2$, $1/q_y<\varepsilon/2$, 且

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=f(x,y)\leqslant\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}<\varepsilon$$

这说明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 从而 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上几乎处处连续, 由 Lebesgue 定理可知 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积.
再固定 y_0 为有理数, 由 Dirichlet 函数的可积性可知

$$\varphi(x)=f(x,y_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_{y_0}}, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}^c\\ 0, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\end{cases}=\frac{D(x)}{q_{y_0}}$$

在 $[0,1]$ 上不可积, 故不存在累次积分 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$. 另一个累次积分同理.
注: 不考虑 (x_0,y_0) 中有一个有理数一个无理数的情况是因为

$$S=\left\{(x,y)\in[0,1]^2: x,y\text{中有一个有理数一个无理数}\right\}$$

是零测集. 事实上, 假定 $x\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{Q}^c$, 则对每一个有理数 $x_i\in[0,1],i=1,2,\cdots,n,(x_i,y)$ 形成一条长度不超过 1 的线段, 它面积的测度为零, 从而 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(x_i,y)$ 作为可数个零测集的并也是零测集. □
2. 解答: 因为 Darboux 上和 $=1\neq0=$ Darboux 下和, 故不可积. 下面考虑累次积分.
如果 y 为无理数, 则 $f(x,y)\equiv0$; 如果 $y=p_y/q_y$ 为有理数, 且为既约分数, 则 $q_x=q_y$ 的既约分数至多有 q_y+1 个. 因此, 至多除 q_y+1 个点 x 外有

$$f(x,y)=f\left(x,\frac{p_y}{q_y}\right)=0$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

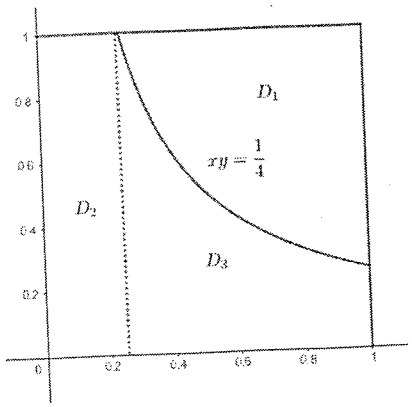
由此知, 无论 y 为无理数还是有理数, 总有 $\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=0$, 从而

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 0\mathrm{d}y=0$$

另一个累次积分同理为 0, 从而两个累次积分相等. □

3. 解答:

(1) 积分区域如图所示



(将小正方形区域分割成三块分类讨论) 计算得

$$\begin{aligned}I=&\iint\limits_{D_2\cup D_3}\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x\int_0^1\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{4}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4x}}\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}y\\&+\int_{\frac{1}{4}}^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4x}}^1\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}y\\=&\frac{3}{64}+\frac{1}{16}\ln 2+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}+\ln 2\right)=\frac{3}{32}+\frac{\ln 2}{8}\end{aligned}$$

(2) 反证 $|f(x,y)|<1/A$ 恒成立. 注意到

$$1=\iint\limits_D\left(xy-\frac{1}{4}\right)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_D\left|xy-\frac{1}{4}\right||f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<A\cdot\frac{1}{A}=1$$

矛盾. 可知命题成立. □

4. 解答: 由于积分区域 D 的面积为 200, 由积分中值定理可知存在 $(\xi,\eta)\in D$ 使得

$$I=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}$$

显然有 $0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant 2$, 我们证明两边的等号不能成立.

假设 $\cos^2\xi+\cos^2\eta=2$, 则

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\frac{1}{102}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I-I=0$$

由于被积函数 $f(x,y)$ 连续非负, 所以必有 $f(x,y)\equiv 0$ 即 $\cos^2 x+\cos^2 y\equiv 2,(x,y)\in D$, 这显然错误, 从而等号不能够取到. 另一边的等号同理可证, 即 $0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$. 于是就有

$$1.96=\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100}=2$$

命题得证. □

5. 解答: 作正交变换, 将 Oxy 平面旋转到平面 $ax+by+cz=0$ 上, 令

$$u=\frac{ax+by+cz}{k}$$

在平面 $u=0$ 内, 记 x 轴为 v 轴, y 轴为 w 轴, 由正交变换的性质易知 $|J|=1$ 且将区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 变为 $u^2+v^2+w^2\leqslant 1$. 于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} f(ku)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\int_{-1}^{1} f(ku)\mathrm{d}u\iint\limits_{v^2+w^2\leqslant 1-u^2}\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-u^2\right)f(ku)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

命题得证. □

6. 解答: 由连续性不妨假定 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\psi(x)\leqslant m$, 令 $D'=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant m\}$. 定义 $f(x,y)=0,(x,y)\in D'\cap D^c$. 由题设知

$$f(x,y)=\int_{\varphi(x)}^{y} f_t(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^y f_t(x,t)\mathrm{d}t$$

从而可得

$$f^2(x,y)=\left(\int_0^y f_t(x,t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant m^2\int_0^m\left(f_t(x,t)\right)^2\mathrm{d}t$$

注意到上式右端与 y 无关, 故又知

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^m f^2(x,y)\mathrm{d}y\leqslant m^2\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^m\left[f_t(x,t)\right]^2\mathrm{d}t\\&=m^2\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\left[f_t(x,t)\right]^2\mathrm{d}t=m^2\iint\limits_D\left[f_y(x,y)\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

取 $K=m^2$ 即可. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

7. 解答: 便于书写起见, 就写成定积分的形式. 考虑 $\|u+v\|_p$ 的 p 次幂:

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b |u+v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}\cdot p} &= \int_a^b |u+v||u+v|^{p-1}\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{三角不等式}}{\leqslant} \int_a^b |u||u+v|^{p-1}\mathrm{d}x + \int_a^b |v||u+v|^{p-1}\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \left(\int_a^b |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |u+v|^{q(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_a^b |v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |u+v|^{q(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\left(\int_a^b |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\int_a^b |u+v|^{qp-q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left[\left(\int_a^b |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\int_a^b |u+v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

(这里 $1/p+1/q=1$) 首尾移项可得

$$\left(\int_a^b |u+v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}\left(p-\frac{p}{q}\right)} \leqslant \left[\left(\int_a^b |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

由于 $p-p/q=1$, 此即

$$\|u+v\|_p \leqslant \|u\|_p + \|v\|_p$$

注: 由 Young 不等式等号成立的条件是 $a^p=b^q$, 可知例题 22.5.7 中 Hölder 不等式等号成立的条件是 $|u|^p/\|u\|_p^p = |v|^q/\|v\|_q^q$. 考虑三角不等式等号成立的条件, 即可知 Minkowski 不等式等号成立的条件是存在 $k\geqslant 0$ 使得 $u=kv$.

注: 当 $0<p<1$ 时不等号反向, 参见周民强《实变函数论》P297 例 6. □

8. 解答: 构造函数

$$g(x,y) = x(1-x)y(1-y)$$

则 g 在 $[0,1]^2$ 的边界上也为零, 且 $\dfrac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} = 4$ 以及

$$\iint\limits_{[0,1]^2} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x \int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

由 f 在 $[0,1]^2$ 的边界上为零可知 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 在线段 $\{(x,y)\mid x=0, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 以及 $\{(x,y)\mid x=1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上值为零, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ 在线段 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, y=0\}$ 以及 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, y=1\}$ 上值为零, 于是

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)g(x,y)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}g(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\&=-\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\&=-\int_0^1\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x=\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

同理可得

$$\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即有

$$\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{[0,1]^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,1]^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,|&=\frac{1}{4}\left|\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\frac{1}{4}\iint\limits_{[0,1]^2}\left|\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}g(x\cdot y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\leqslant\frac{B}{4}\iint\limits_{[0,1]^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{B}{4}\cdot\frac{1}{36}=\frac{B}{144}\end{aligned}$$

得证. □

9. 解答: 由 f 在 D 上可积可知 f 在 D 上几乎处处连续. 先证明存在一个连续点 $\boldsymbol{x}_0$ 使 $f(\boldsymbol{x}_0)>0$, 这很容易, 记 f 在 D 上的不连续点集合为 D^*, 反证连续点处都有 $f(\boldsymbol{x})\leqslant 0$, 则

$$0<\iint\limits_D f=\iint\limits_{D^*}f+\iint\limits_{D\setminus D^*}f\leqslant 0+0=0$$

产生了矛盾. 余下的工作就与练习题 10.2.4 第 1 题注解中所说的相仿了. □

注: 也可参见徐森林下册 P10 第 412 题.

10. 解答: 由连续性可设 $m\leqslant f(\boldsymbol{x})\leqslant M,\boldsymbol{x}\in\Omega$, 则

$$mV_\Omega\leqslant\iint\limits_\Omega\cdots\int f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant MV_\Omega$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

即

$$m \leqslant \frac{1}{V_\Omega} \underset{\Omega}{\iint \cdots \int} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant M$$

由连续函数的介值性可知, 存在 $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ 使得

$$\underset{\Omega}{\iint \cdots \int} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = V_\Omega$$

注: (1) 本题连续的条件可以减弱为具有介值性.

(2) 诸如积分第二中值定理之类的一元形式命题也可以仿照推广到高维情形, 推导过程意义不大, 在此略过, 唯独值得注意的是, 在高维情形下与一维不同的是, 积分中值定理可以找出无穷多个这样的 $\boldsymbol{\xi}$. 下面以二元形式为例来证明这个命题.

命题: 设 f 在平面区域 D 上连续, 则存在无穷多个 $(\xi, \eta) \in D$ 使得

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi, \eta) S_D$$

证: 反证这样的点只有有限多个 (已经证明至少一个), 记它们为 $\boldsymbol{P}_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, n$, 则存在一个 $\varepsilon > 0$, 使得对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 以 $\boldsymbol{P}_i$ 为中心, ε 为半径的闭圆盘

$$B(\boldsymbol{P}_i, \varepsilon) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}_i | \leqslant \varepsilon \right\} \subset \mathring{D}$$

且这些圆两两外离. 任取 $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon]$, 也都有

$$B(\boldsymbol{P}_i, \varepsilon_1) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}_i | \leqslant \varepsilon_1 \right\} \subset \mathring{D}$$

且这些圆两两外离. 在 $D_1 = \mathring{D} - \bigcup_{i=1}^{n} B(\boldsymbol{P}_i, \varepsilon_1)$ 内, $f(x, y) \neq C$, 进一步来证明 $f(x, y) > c$ 或 $f(x, y) < c$ 在 D_1 内恒成立. 反设结论不成立, 则存在 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2 \in D_1$, 使得 $f(\boldsymbol{Q}_1) > c$, $f(\boldsymbol{Q}_2) < c, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2 \in \mathring{D}$, 故存在完全含于 $\mathring{D}$ 的折线段 L, L 连接了 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$. 现在来构造一条连接 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$ 的连续曲线: 在圆 $B(\boldsymbol{P}_i, \varepsilon_1), i = 1, 2, \cdots, n$ 外的部分, L_1 与 L 重合. 如果 L 有部分在圆 $B(\boldsymbol{P}_i, \varepsilon_1)$ 上, 那么这条折线与这个圆至少有两个交点, 选取第一个进圆的交点和最后一个离开圆的交点, 将 L 在这两个交点间的部分通通去掉, 用连接这两个交点的圆周上的弧段替代. 处理的顺序按照折线与圆相交的顺序. 这样所得到的曲线段 L_1 仍然全部含于 $\mathring{D}$ 内, 而且是连续的. $f(x, y)$ 在 L_1 上连续, 且 $f(\boldsymbol{Q}_1) > c, f(\boldsymbol{Q}_2) < c$, 由介值定理, 存在 $\boldsymbol{Q}_3 \in L_1 \subset \mathring{D}$, 使得 $f(\boldsymbol{Q}_3) = c$, 而且 $\boldsymbol{Q}_3 \neq \boldsymbol{P}_i$, 矛盾.

由此可知 $f(x, y)$ 在 D 内恒大于 c 或恒小于 c.

另外, $\forall \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon]$, 在 $D_1 = \mathring{D} - \bigcup_{i=1}^{n} B(\boldsymbol{P}_i, \varepsilon_j), j = 1, 2$ 内 $f(x, y) > c$ 或 $f(x, y) < c$ 中的一个恒成立是一致的. 由 ε_1 的任意性, 可设 $f(x, y) > c$ 在 $\mathring{D} - \{\boldsymbol{P}_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

恒成立, 于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > S_D c = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

矛盾. 这就证明了二元积分中值定理选出的 (ξ,η) 一定可以有无穷多个. □

11. 解答: 参见第十一章第一组参考题第 3 题第 (2) 问. □

12. 解答: 参见第十一章第一组参考题第 3 题第 (1) 问. □

13. 解答:

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\\
=&\int_0^R \mathrm{d}s \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=s^2} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\\
=&\int_0^R \mathrm{d}s \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=s^2} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{s^2+A^2-2ax-2by-2cz}}\\
\leqslant&\int_0^R \mathrm{d}s \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=s^2} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{s^2+A^2-2As}} = \int_0^R \frac{4\pi s^2}{A-s}\mathrm{d}s\\
\leqslant&\int_0^R \frac{4\pi s^2}{A-R}\mathrm{d}s = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{A-R}
\end{aligned}$$

中间利用了 Cauchy 不等式

$$(ax+by+cz)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = A^2s^2$$

$$\Rightarrow -As \leqslant ax+by+cz \leqslant As$$

再利用上述另一边的不等式, 则

$$\begin{aligned}
&\int_0^R \mathrm{d}s \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=s^2} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{s^2+A^2-2ax-2by-2cz}}\\
\geqslant&\int_0^R \mathrm{d}s \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=s^2} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{s^2+A^2+2As}} = \int_0^R \frac{4\pi s^2}{A+s}\mathrm{d}s\\
\geqslant&\int_0^R \frac{4\pi s^2}{A+R}\mathrm{d}s = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{A+R}
\end{aligned}$$

注: 事实上本题也可以利用第 10 题的结论, 存在 (ξ,η,ζ) 处于以原点为中心半径为 R 的球内使得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}$$

注意到几何意义: 分母是 (ξ,η,ζ) 到球外定点 (a,b,c) 的距离, 最远不会超过 $A+R$, 最近不会少于 $A-R$, 则命题就得证了. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

14. 解答: 易见

$$\begin{aligned}F(t)&=\iiint\limits_{[0,t]^3}f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^t f(xyz)\mathrm{d}z\\&=\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^{txy}\frac{f(u)}{xy}\mathrm{d}u=\int_0^t\frac{1}{x}\mathrm{d}x\int_0^t\frac{1}{y}g(txy)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}F'(t)&=\int_0^t\frac{g\left(t^2y\right)}{ty}\mathrm{d}y+\int_0^t\frac{g\left(t^2x\right)}{tx}\mathrm{d}x+\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^t\frac{f(txy)}{xy}xy\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u+\frac{1}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u+\int_0^t\left[\int_0^{t^2x}\frac{f(u)}{tx}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u+\int_0^t\frac{g\left(t^2x\right)}{tx}\mathrm{d}x=\frac{3}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

命题得证. □

15. 解答:

(1) 点 $(f(s),\varphi(s))$ 处的外法线方向, 倾角为 $\theta(s)-\pi/2$, 因此 D 内任意一点的坐标, 可用 s,t 表示为

$$\begin{aligned}x&=f(s)+t\cos\left(\theta(s)-\frac{\pi}{2}\right)=f(s)+t\sin\theta(s)\\y&=\varphi(s)+t\sin\left(\theta(s)-\frac{\pi}{2}\right)=\varphi(s)-t\cos\theta(s)\end{aligned}$$

其中 $0<t<l,0\leqslant s<2\pi l$.

(2) 注意到此时有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=f'(s)=\cos\theta(s),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\varphi'(s)=\sin\theta(s)$$

知

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|=\begin{vmatrix}f(s)+t\theta'\cdot\cos\theta & \sin\theta\\ \varphi'(s)+t\theta'\cdot\sin\theta & -\cos\theta\end{vmatrix}=-1-t\theta'$$

所以

$$\begin{aligned}S_D&=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D|J|\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^{2xl}\mathrm{d}s\int_0^l\left(1+t\theta'(s)\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2xl}\left(l+\frac{l^2}{2}\theta'(s)\right)\mathrm{d}s=3\pi l^2\end{aligned}$$

命题得证. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第二组参考题　学员: d39

1. 解答: 在练习题 8.5.3 第 10 题中取 $x=\varepsilon a^p, y=\varepsilon^{-q/p}b^q$, 则第一个不等号成立. 再由 $p,q>1$ 可知第二个不等号成立. □

2. 解答: 由于

$$\|u\|_q^q=\iint\limits_\Omega |u|^{\lambda q}|u|^{(1-\lambda)q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\left[\iint\limits_\Omega (|u|^{\lambda q})^{\frac{p}{\lambda q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{\frac{\lambda q}{p}}\left[\iint\limits_\Omega (|u|^{(1-\lambda)q})^{\frac{r}{(1-\lambda)q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{\frac{(1-\lambda)q}{r}}$$
$$=\|u\|_p^{\lambda q}\|u\|_r^{(1-\lambda)q}$$

这里需要注意到

$$\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{r}$$

再由例题 22.5.9 和上题结论可知

$$\|u\|_q\leqslant\|u\|_r^{\frac{\mu}{1+\mu}}\|u\|_p^{\frac{1}{1+\mu}}\leqslant\varepsilon\|u\|_r+\varepsilon^{-\mu}\|u\|_p$$

命题得证. □

3. 解答:

(1) 仿照例题 10.2.5 即可. 若设 $m\leqslant u(x,y)\leqslant M,(x,y)\in\Omega$, 则可推出

$$M\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\iint\limits_\Omega u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/n}\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\iint\limits_\Omega u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/n}\geqslant M-\varepsilon$$

由 ε 的任意性可见

$$\lim_{p\to+\infty}\Phi_p(u)=\lim_{p\to+\infty}|\Omega|^{-1/p}\cdot M=M$$

(2) 记 $q=-p$, 且 $1/M\leqslant 1/u(x,y)\leqslant 1/m,(x,y)\in\Omega$, 直接由 (1) 的结论可知

$$\lim_{p\to-\infty}\Phi_p(u)=\lim_{q\to+\infty}\Phi_q(u)=(1/m)^{-1}=m$$

(3) 类似命题 11.2.1, 由 Jensen 不等式可知

$$\ln\Phi_p(u)=\frac{1}{p}\left[\ln\left(\frac{1}{|\Omega|}\iint\limits_\Omega u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\right]\geqslant\frac{1}{|\Omega|}\iint\limits_\Omega\ln u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又由不等式 $\ln x<x-1$ 可得

$$\frac{1}{p}\left[\ln\left(\frac{1}{|\Omega|}\iint\limits_\Omega u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\right]\leqslant\frac{1}{p}\left[\frac{1}{|\Omega|}\iint\limits_\Omega u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y-1\right]=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{|\Omega|}\iint\limits_\Omega(u^p-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

注意到当 $p \to 0$ 时 $(u^p - 1)/p \to \ln u$, 故

$$\lim_{p\to 0} \iint\limits_{\Omega} \frac{u^p - 1}{p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} \ln u \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(更为严谨的写法是作差放缩至零)

由夹逼定理可知

$$\lim_{p\to 0} \Phi_p(u) = \exp\left\{\frac{1}{|\Omega|} \iint\limits_{\Omega} \ln u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$$

得证. □

4. 解答: 以球心 $\boldsymbol{O}$ 为原点, 以 $\boldsymbol{OP}_0$ 为 x 轴建立空间直角坐标系, 设 $\boldsymbol{P}_0 = (r, 0, 0)$, 其中 $r \in [0, R]$.

(1) 设点 $\boldsymbol{Q}$ 为 (x_0, y_0, z_0), 则球面的切平面方程为

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = R^2$$

点 $\boldsymbol{P}_0$ 在该切平面上的投影点坐标为

$$\begin{cases} x = r + x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = z_0 t \end{cases}$$

故

$$x_0 (r + x_0 t) + y_0^2 t + z_0^2 t = R^2$$

即

$$t = \frac{R^2 - r x_0}{R^2} = 1 - \frac{r}{R^2} x_0$$

故

$$\begin{cases} x = r + x_0 \left(1 - \dfrac{r}{R^2} x_0\right) \\ y = y_0 \left(1 - \dfrac{r}{R^2} x_0\right) \\ z = z_0 \left(1 - \dfrac{r}{R^2} x_0\right) \end{cases}$$

$$x_0 : y_0 : z_0 = x - r : y : z$$

令 $\begin{cases} x_0 = (x - r)u \\ y_0 = yu \\ z_0 = zu \end{cases}$, $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$, 故

$$\left[(x - r)^2 + y^2 + z^2\right] u^2 = R^2 \Rightarrow u^2 = \frac{R^2}{(x - r)^2 + y^2 + z^2}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

又 $y=y_0\left(1-\dfrac{r}{R^2}x_0\right)$, 即有

$$\left[1+\frac{r}{R^2}(x-r)u^2\right]^2=u^2$$

化简可得

$$\begin{aligned}1+\frac{r}{R^2}(x-r)u^2&=1+\frac{r}{R^2}(x-r)\frac{R^2}{(x-r)^2+y^2+z^2}\\&=1+\frac{r(x-r)}{(x-r)^2+y^2+z^2}=\frac{(x-r)^2+y^2+z^2+r(x-r)}{(x-r)^2+y^2+z^2}\\&=\frac{x(x-r)+y^2+z^2}{(x-r)^2+y^2+z^2}\end{aligned}$$

结合以上式子可知

$$\left[x(x-r)+y^2+z^2\right]^2=R^2\left[(x-r)^2+y^2+z^2\right]$$

即为所求曲面方程. 作变换

$$\begin{cases}x-r=\rho\cos\varphi\\y=\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\geq0,\varphi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi]\\z=\rho\sin\varphi\sin\theta\end{cases}$$

代入曲面方程解得

$$\rho^2+r\rho\cos\varphi=\pm R\rho$$

但当 $\rho>0$ 时

$$\rho^2+r\rho\cos\varphi\geqslant\rho^2-r\rho\geqslant\rho^2-R\rho>-R\rho\Rightarrow\rho=R-r\cos\varphi$$

因此所求体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{R-r\cos\varphi}\rho^2d\rho=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin\varphi(R-r\cos\varphi)^3d\varphi\\&=\frac{\pi}{6r}(R-r\cos\varphi)^4\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi\left[(R+r)^4-(R-r)^4\right]}{6r}=\frac{4\pi}{3}R\left(R^2+r^2\right)\end{aligned}$$

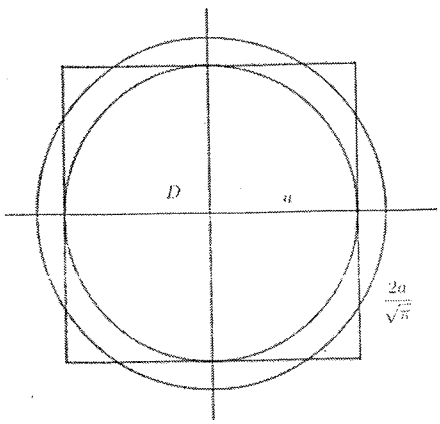
(2) 体积值与 r, 也就是 $\boldsymbol{P}_0$ 到球心的距离有关, 而

$$\operatorname{grad}V(\boldsymbol{P}_0)=\frac{8\pi}{3}R\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_0}$$

故沿着向径方向变化时, 上述体积的变化率最大. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

5. 解答: 如图所示



以原点为中心, 作半径为 a 的圆 D_1. 边长为 $2a$ 的正方形 D_2, 和半径为 $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}a$ 的圆 D_3. 显然 $D_1 \subset D_2, D_1 \subset D_3$, 而 D_2, D_3 的面积都为 $4a^2$. 记 $D_2 \cap D_3 = D$, 则

$$\begin{aligned}\left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(\int_{-a}^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{4}\iint\limits_{D_2} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &> \frac{1}{4}\iint\limits_{D_1} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^a = \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\iint\limits_{D_2} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{4}\left[\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2\setminus D} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \\ &< \frac{1}{4}\left[\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_3\setminus D} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \\ &= \frac{1}{4}\iint\limits_{D_3} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}a} \mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{4}\left(-\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}a} = \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}a^2}\right)\end{aligned}$$

综上可知

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right) < \left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}a^2}\right)$$

再开方即得结论. □

6. 解答: 作 $[v_1, v_2]$ 得任一划分

$$T: v_1 = v_0' < v_1' < \cdots < v_n' = v_2$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

令 $d(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta v_i$, 这里 $\Delta v_i=v_i'-v_{i-1}'$. 于是, 由积分中值定理知

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{n}\iint\limits_{S(v_{i-1}',v_i')}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n}f(\bar{x}_i,\bar{v}_i)\Delta S_i$$

这里 ΔS_i 表示小环域 $S(v_{i-1}',v_i')$ 的面积 (可参看吉米多维奇题解第 6 册 P26 的插图 8.33), $\bar{P}(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\in S(v_{i-1}',v_i')$. 令 $v_i^*=f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$, 则 $v_{i-1}'\leqslant v_i^*\leqslant v_i'$. 又由微分中值定理有

$$\Delta S_i=F\left(v_i'\right)-F\left(v_{i-1}'\right)=F'\left(\bar{v}_i\right)\left(v_i'-v_{i-1}'\right)=F'\left(\bar{v}_i\right)\Delta v_i$$

其中 $v_{i-1}'\leqslant\bar{v}_i\leqslant v_i'$. 由于 $F'(v)$ 可积, 可设 $|F'(v)|\leqslant M, v_1\leqslant v\leqslant v_2$, 我们有

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n}v_i^*F'\left(\bar{v}_i\right)\Delta v_i=I_1+I_2$$

其中

$$I_1=\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_iF'\left(\bar{v}_i\right)\Delta v_i,\quad I_2=\sum_{i=1}^{n}\left(v_i^*-\bar{v}_i\right)F'\left(\bar{v}_i\right)\Delta v_i$$

由于 $F'(v)$ 在 $[v_1,v_2]$ 上可积, 故 $vF'(v)$ 也在 $[v_1,v_2]$ 上可积. 因此

$$\lim_{d(T)\to0}I_1=\lim_{d(T)\to0}\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_iF'\left(\bar{v}_i\right)\Delta v_i=\int_{v_1}^{v_2}vF'(v)\mathrm{d}v$$

另一方面

$$|I_2|\leqslant Md(T)\sum_{i=1}^{n}\Delta v_i=M\left(v_2-v_1\right)d(T)\Rightarrow\lim_{d(T)\to0}I_1=0$$

从而就有

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{v_1}^{v_2}vF'(v)\mathrm{d}v$$

证毕. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第二十三章 含参变量积分

§23.1.3 练习题 学员: d39

1. 解答:

$$f'(\theta)=\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial\theta}\ln(1+\lambda\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\theta\cos x}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^\pi \frac{(1+\theta\cos x)-1}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\theta}\left(\pi-\int_0^\pi \frac{1}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x\right)$$

可计算出

$$\int \frac{1}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{(1+\theta)(1-\theta)}}\arctan\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}\tan\frac{x}{2}+C$$

故

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{(1+\theta)(1-\theta)}}$$

因此

$$f'(\theta)=\frac{1}{\theta}\left[\pi-\frac{\pi}{\sqrt{(1+\theta)(1-\theta)}}\right]\Rightarrow f(\theta)=\int f'(\theta)\mathrm{d}\theta=\pi\ln(1+\sqrt{1-\theta^2})+C$$

再由 $f(0)=0$ 可推出 $C=-\pi\ln 2$, 故 $f(\theta)=\pi\ln(1+\sqrt{1-\theta^2})-\pi\ln 2$. □

2. 解答: 记 $G(t,u)=\int_0^u f(t,s)\mathrm{d}s$, 则

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x[G(t,x^2)-G(t,t^2)]\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[G(t,x^2)-G(t,t^2)]\mathrm{d}t=\int_0^x 2xf(t,x^2)\mathrm{d}t$$ □

3. 解答: 利用 $f(x,y)$ 的连续性可知, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon$, 从而

$$|I(x)-I(x_0)|=\left|\int_c^d[f(x,y)-f(x_0,y)]\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_c^d|f(x,y)-f(x_0,y)|\mathrm{d}y<(d-c)\varepsilon$$

由此可见 $I(x)$ 在 (a,b) 上连续. □

4. 解答:

$$I'(a)=\int_0^{2\pi}\frac{2a-2R\cos\theta}{R^2+a^2-2aR\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\left[1+\frac{a^2-R^2}{R^2+a^2-2aR\cos\theta}\mathrm{d}\theta\right]$$

利用结论 (万能代换可推导, 也可用留数证明, 参见《积分的方法与技巧》P330 例 6)

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{A+B\cos\theta}=2\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}\theta}{A+B\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{A^2-B^2}}(A>B>0)$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{R^2+a^2-2aR\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{(R^2+a^2)^2-4a^2R^2}}=\frac{2\pi}{R^2-a^2}$$

再整理化简即可知 $I'(a)=0$. □

5. 解答: 不妨设 $a<b$.

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x$$

当 $x\to0^+$ 时 $\sin\left(\ln(1/x)\right)x^y\to0$, 故 $\sin\left(\ln(1/x)\right)x^y$ 在 $0\leqslant x\leqslant1, a\leqslant y\leqslant b$ 上连续, 故可交换积分次序. 作代换 $x=e^{-t}$, 可得

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-(y+1)t}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{1+(1+y)^2}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x&=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+(1+y)^2}=\arctan(1+y)\Big|_a^b\\&=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)=\arctan\frac{b-a}{1+(1+b)(1+a)}\end{aligned}$$ □

6. 解答: 改写原式为 $F(t)=\int_0^a\left(\int_{t+u}^{a+t+u}f(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$, 则

$$F'(t)=\int_0^a[f(a+t+u)-f(t+u)]\mathrm{d}u=\int_{t+a}^{t+2a}f(u)\mathrm{d}u-\int_t^{t+a}f(u)\mathrm{d}u$$

$$F''(t)=f(t+2a)-2f(t+a)+f(t)$$

得证. □

7. 解答: 易知

$$f'(x)=2\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\cdot e^{-x^2}=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$g'(x)=-\int_0^1 2xe^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

可见 $f'(x)+g'(x)\equiv0$, 这说明 $f(x)+g(x)\equiv C$. 易证 $f(0)=0, g(0)=\pi/4$, 则 $C=\pi/4$, 从而

$$f(x)+g(x)\equiv\pi/4$$

又由于

$$\begin{aligned}0\leqslant g(x)&=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t=e^{-x^2}\int_0^1\frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&\leqslant e^{-x^2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=e^{-x^2}\cdot\frac{\pi}{4}\to0,\quad x\to+\infty\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}g(x)=\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

两边开方即得结论. □

§23.2.3 练习题 学员: d39

1. 解答: 由于

$$\left|e^{-(1+a^2)t}\sin t\right|\leqslant e^{-t},0\leqslant t<+\infty,-\infty<a<+\infty$$

而 $\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=1$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知原积分在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 由于

$$\left|\int_0^A\cos xy\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{\sin Ay}{y}\right|\leqslant\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{y_0},\quad A\geqslant 0,y\geqslant y_0$$

因此它在 $[y_0,+\infty)$ 一致有界. 而 $1/\sqrt{x+y}$ 是 x 的单调减少函数且

$$0<\frac{1}{\sqrt{x+y}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x+y_0}}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+y_0}}=0$. 故这个极限关于 y 在 $[y_0,+\infty)$ 上是一致的. 于是由 Dirichlet 判别法知原积分在 $[y_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) 对于正整数 n, 取 $t_n=\dfrac{1}{n^2}$, 此时

$$\begin{aligned}\left|\int_n^{2n}e^{-t_nx^2}\mathrm{d}x\right|&=\int_n^{2n}e^{-\frac{1}{n^2}x^2}\mathrm{d}x>\int_n^{2n}e^{-\frac{1}{n^2}(2n)^2}\mathrm{d}x\\&=\int_n^{2n}e^{-4}dx=e^{-4}n\geqslant e^{-4}\end{aligned}$$

因此, 只要取 $\varepsilon_0=e^{-4}$, 则对于任意大的正数 A_0, 总存在正整数 n, 满足 $n>A_0$ 及 $t_n=1/n^2\in(0,+\infty)$, 使得

$$\left|\int_n^{2n}e^{-t_nx^2}\mathrm{d}x\right|>e^{-4}=\varepsilon_0$$

由 Cauchy 准则可知原积分关于 t 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

(4) 显然 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 有界, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$, 由 Dirichlet 判别

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛, 它当然关于 α 一致收敛. 显然 $e^{-\alpha x}$ 关于 x 单调且

$$0\leqslant e^{-\alpha x}\leqslant 1,\quad 0\leqslant\alpha<+\infty, 1\leqslant x<+\infty$$

即 $e^{-\alpha x}$ 一致有界. 由 Abel 判别法知原积分在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(5) 注意到

$$J(A)=\int_A^{2A}e^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x=\int_{A-y}^{2A-y}e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

并让 y 取 A 值,

$$J(A)=\int_0^A e^{-u^2}\mathrm{d}u\to\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u(A\to+\infty)$$

即 $J(A)$ 在 $A\to+\infty$ 时不趋于 0, 从而原积分关于 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致收敛.

(6) 先证明 $\int_0^{+\infty}x\ln x e^{-t\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 在 $[t_0,+\infty)(t_0>0)$ 上一致收敛. 由于

$$\left|x\ln x e^{-t\sqrt{x}}\right|\leqslant|x\ln x|e^{-t_0\sqrt{x}},\quad 0\leqslant x<+\infty, t_0\leqslant t<+\infty$$

而 $\int_0^1 x\ln\frac{1}{x}e^{-t_0\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty}x\ln x e^{-t_0\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 均收敛, 由 Weierstrass 判别法知原积分在 $[t_0,+\infty)$ 上一致收敛.

再证明 $\int_0^{+\infty}x\ln x e^{-t\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛. 对于正整数 n, 取 $t_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, 这时

$$\begin{aligned}&\left|\int_n^{2n}x\ln x e^{-t_n\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_n^{2n}x\ln x e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right|\\ >&n\ln n\int_n^{2n}e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{x}}\mathrm{d}x>n\ln n\int_n^{2n}e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2n}}\mathrm{d}x\\ =&n^2\ln n\cdot e^{-\sqrt{2}}\geqslant 4\ln 2\cdot e^{-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

因此, 只要取 $\varepsilon_0=4\ln 2\cdot e^{-\sqrt{2}}$, 则对于任意大的正数 A_0, 总存在正整数 n 满足 $n>A_0$, 及 $y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\in(0,+\infty)$, 使得

$$\left|\int_n^{2n}x\ln x e^{-t_n\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right|>4\ln 2\cdot e^{-\sqrt{2}}=\varepsilon_0$$

由 Cauchy 准则知原积分在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

(7) 由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ 收敛, 它当然关于 u 一致收敛. 显然 $1-e^{-ut}$ 关于 t 单调, 且

$$0\leqslant 1-e^{-ut}\leqslant 1,\quad 0\leqslant u\leqslant 1, 1\leqslant t<+\infty$$

即 $1-e^{-ut}$ 一致有界. 由 Abel 判别法, 原积分在 $[0,1]$ 上一致收敛.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(8) 由于

$$\left|\int_0^A \alpha t\cdot e^{-\alpha^2t^2}\cos\alpha^2t^2\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^A \alpha t\cdot e^{-\alpha^2t^2}\mathrm{d}t=\frac{1-e^{-\alpha^2A^2}}{2\alpha}$$

且

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{1-e^{-\alpha^2A^2}}{2\alpha}=0,\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1-e^{-\alpha^2A^2}}{2\alpha}=0$$

因此它在 $(0,+\infty)$ 一致有界, 而 $\dfrac{1}{1+\alpha^2+t^2}$ 是 x 的单调减少函数且

$$\frac{1}{1+\alpha^2+t^2}\leqslant\frac{1}{1+t^2},\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+t^2}=0$$

因此 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{1+\alpha^2+t^2}=0$ 关于 α 在 $(0,+\infty)$ 上是一致的, 于是由 Dirichlet 判别法知原积分在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

(9) 对于正整数 n, 取 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{1+(2n+1)^2\pi^2}}$, 此时

$$\begin{aligned}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-x_n^2(1+y^2)}\sin y\mathrm{d}y\mid&=\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-\frac{1}{1+(2n+1)^2\pi^2}(1+y^2)}\sin y\mathrm{d}y\right|\\&>\frac{1}{e}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin y\mathrm{d}y=\frac{2}{e}\end{aligned}$$

因此, 只要取 $\varepsilon_0=2/e$, 则对于任意大的正数 A_0, 总存在正整数 n 满足 $2n\pi>A_0$ 及 $y_n=\dfrac{1}{\sqrt{1+(2n+1)^2\pi^2}}\in(0,+\infty)$, 使得

$$\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-x_n^2(1+y^2)}\sin y\mathrm{d}y\right|>\frac{2}{e}=\varepsilon_0$$

由 Cauchy 准则知原积分关于 x 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

(10) 对于任意取定的正数 A, 由于

$$\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}=\frac{\pi}{2}-\arctan(\alpha A)$$

取 $\alpha=\dfrac{1}{A}$, 则有

$$\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2}=\int_A^{+\infty}\frac{1/A}{1+x^2/A^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

因此原积分在 $(0,1)$ 上非一致收敛.

(11) 当 $0<x<1$ 时有

$$0\leqslant\left|\frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}\right|<\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

当 $1<x<2$ 时有

$$0 \leqslant \left|\frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}\right| < \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}$$

因此有

$$\int_0^2 \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)(2-x)}}\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}\mathrm{d}x$$

由 Taylor 展开式可知

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), x \to 0^+ \\
\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), x \to 1 \\
\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), x \to 1 \\
\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}\right), x \to 2
\end{aligned}$$

可知右端积分收敛. 由 Weierstrass 判别法可知原积分关于 $|t|<1/2$ 一致收敛.

(12) 先证明 $\int_0^1 (1-x)^{u-1}\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上一致收敛. 由于

$$(1-x)^{u-1} \leqslant (1-x)^{a-1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, a \leqslant u < +\infty$$

而

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}$$

积分收敛. 由 Weierstrass 判别法知原积分在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

再证明原积分再 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛. 对于任意取定的正数 A 且 $A \to 0$, 由

$$\int_A^1 (1-x)^{u-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{A}$$

取 $u=A \in (0,+\infty)$, 当 A 足够小时, 我们有

$$\int_A^1 (1-x)^{u-1}\mathrm{d}x = \frac{(1-A)^u}{u} = \frac{(1-A)^A}{A} > 1$$

因此原积分在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛. □

2. 解答: 由积分 $\int_0^1 x^a f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的, 而 $x^{\lambda-a}$ 对于 $\lambda \geqslant a$ 的值是 x 的单调函数, 并以 1 为界. 因此积分

$$\int_0^1 x^\lambda f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\lambda-a} \cdot x^a f(x)\mathrm{d}x$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

关于 λ 一致收敛. 类似地可以看出以下积分

$$\int_1^{+\infty} x^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} x^{\lambda-b}\cdot x^b f(x)\mathrm{d}x$$

关于 $\lambda \leqslant b$ 一致收敛. 因此原积分关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. □

3. 解答: 取 $x = 1/A \in (0,+\infty)$. 则有

$$\int_A^{+\infty} xe^{-xy}\mathrm{d}y = \frac{1}{e}$$

因此 $\int_0^{+\infty} xe^{-xy}\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛. □

§23.2.6 练习题 学员: d39

1. 解答: 任取 $x_0 \neq x \in U(x_0)$, 则

$$\frac{\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y - \int_a^{+\infty} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y}{x-x_0} = \frac{\int_a^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{x_0}^{x} f_x(x,y)\mathrm{d}x}{x-x_0}$$

$\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $U(x_0)$ 上一致收敛, 故

$$\frac{\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y - \int_a^{+\infty} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y}{x-x_0} = \frac{\int_a^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{x_0}^{x} f_x(x,y)\mathrm{d}x}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y}{x-x_0}$$

$$\frac{\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y - \int_a^{+\infty} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y}{x-x_0} - \int_a^{+\infty} f_x(x_0,y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_a^{+\infty}\left[f_x(x,y) - f_x(x_0,y)\right]\mathrm{d}y}{x-x_0}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $Y > a$, 使得对任意 $x \in U(x_0)$, 恒有

$$\left|\int_Y^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon$$

当 $x \to x_0$ 时, $f_x(x,y)$ 关于 y 在任何有限区间上一致收敛于 $f_x(x_0,y)$, 故存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x \in U(x_0)$, $y \in [a,Y]$, 只要 $0 < |x-x_0| < \delta$, 就有

$$|f_x(x,y) - f_x(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{Y-a}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y-\int_a^{+\infty} f\left(x_0,y\right)\mathrm{d}y}{x-x_0}-\int_a^{+\infty} f_x\left(x_0;y\right)\mathrm{d}y\right|\\ \leqslant&\frac{\left|\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_a^{Y}\left|f_x(x,y)-f_x\left(x_0,y\right)|\mathrm{d}y\right|+\left|\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_Y^{+\infty}\left[f_x(x,y)-f_x\left(x_0,y\right)\right]\mathrm{d}y\right|}{|x-x_0|}\\ =&\frac{\left|\varepsilon\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\right|+\left|2\varepsilon\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\right|}{|x-x_0|}=3\varepsilon\end{aligned}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\bigg|_{x=x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y-\int_a^{+\infty} f\left(x_0,y\right)\mathrm{d}y}{x-x_0}=\int_a^{+\infty} f_x\left(x_0,y\right)\mathrm{d}y$$

即在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(x)$ 存在. □

2. 解答: 当 $1-\alpha^2>0$ 即 $|\alpha|<1$ 时,

$$\begin{aligned}F(\alpha)&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-\alpha^2)x}{(1-\alpha^2)x}\mathrm{d}[(1-\alpha^2)x]\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

当 $1-\alpha^2<0$ 即 $|\alpha|>1$ 时

$$\begin{aligned}F(\alpha)&=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha^2-1)x}{(\alpha^2-1)x}\mathrm{d}[(\alpha^2-1)x]\\&=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

当 $1-\alpha^2=0$ 即 $|\alpha|=1$ 时, $F(\alpha)=0$. 于是, 在 $\alpha=\pm1$ 处 $F(\alpha)=\pm1$ 处间断, 而在其余区间都连续. □

3. 解答: 易见 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{x}\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 是收敛的. 当 $\alpha>0$ 时

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{\alpha x^2}\mathrm{d}\left(\alpha x^2\right)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$$

(这说明 $F(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续) 且 $F(0)=0$, 故 $F(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不连续.

如果 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{x}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, 则 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x^2}{x}\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛, 则 $F(\alpha)$ 理应在 $[0,+\infty)$ 连续, 矛盾. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

4. 解答: 对每个 $A>1$, 有

$$\left|\int_1^A xe^{-yx}\mathrm{d}y\right| = |e^{-x}-e^{-Ax}| \leqslant 2$$

又 $1/y \searrow 0$, 故由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty} \frac{xe^{-yx}}{y}\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 从而连续. 再考虑

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xe^{-yx}}{y}\right) = \frac{e^{-xy}(1-xy)}{y}$$

对每个 $A>1$, 易见

$$\left|\int_1^A \frac{1-xy}{e^{xy}}\mathrm{d}y\right| = \left|\frac{y}{e^{xy}}\right|_1^A\Bigg| = \left|\frac{A}{e^{Ax}}-\frac{1}{e^x}\right| \leqslant 2$$

又 $1/y \searrow 0$, 故可知 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xy}(1-xy)}{y}\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, 从而求导和积分可换序, $F'(x)$ 也自然存在. □

5. 解答: 拆分

$$F(\alpha) = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^{2-\alpha}}\mathrm{d}x = I_1 + I_2$$

I_1 以 0 为瑕点, I_2 以 π 为瑕点. 对 $\forall 0<\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 2-\varepsilon<2$, 由

$$\left|\int_0^\eta \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^{2-\alpha}}\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_0^\eta \frac{x}{x^\varepsilon(\pi/2)^{2-\alpha}}\mathrm{d}x\right| = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2-\alpha}\frac{\eta^{2-\varepsilon}}{2-\varepsilon} \to 0 \quad (\eta\to 0)$$

$$\left|\int_{\pi-\eta}^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^{2-\alpha}}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^\eta \frac{\sin t}{(\pi-t)^\alpha t^{2-\alpha}}\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon} \to 0 \quad (\eta\to 0)$$

知 I_1, I_2 在 $\varepsilon\leqslant p\leqslant 2-\varepsilon$ 上一致收敛, 所以 $F(\alpha)=I_1+I_2$ 在 $(0,2)$ 内闭一致收敛, 从而 $F(\alpha)$ 在 $(0,2)$ 上连续. □

6. 解答: 考虑当 $y\in[1/2,2]$ 时

$$ye^{-x^2y^2}\cos[x(1-y)]\mathrm{d}x \leqslant 2e^{-x^2/2}$$

而 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ 收敛, 故原积分在 $[1/2,2]$ 上一致收敛. 从而积分和极限可以换序, 故有

$$\lim_{y\to 1}F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

□

7. 解答:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2 x\mathrm{d}\frac{1}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}(2x) = \pi$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin x}{x} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right]\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$;

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} -\frac{x}{2\alpha}\mathrm{d}e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha^{3/2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}};$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(ax^2+bx+c\right)}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}\left[(ax+b/2)^2+ac-b^2/4\right]}\mathrm{d}x = e^{\frac{b^2/4-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot e^{-\frac{1}{a}(ax+b/2)^2}\mathrm{d}x$

$$= e^{\frac{b^2/4-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{a}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2/4-ac}{a}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2/4-ac}{a}}$$ □

8. 解答:

(1) 由

$$I'(a) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right]\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} -e^{ax}\sin x\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2+1}$$

可知

$$I(a) = -\int\frac{1}{a^2+1}\mathrm{d}a = -\arctan a + C$$

又 $I(0) = \dfrac{\pi}{2}$, 则

$$I(a) = -\arctan a + \frac{\pi}{2}$$

(2) 由

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}\right]\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\alpha}$$

可知

$$I(\alpha) = \int\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\alpha}\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha) + C$$

又 $I(\alpha) = 0$, 故

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$$

(3) 由

$$f'(x) = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{y}xe^{-yx}\right]\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty}\frac{1-xy}{ye^{xy}}\mathrm{d}y = \frac{f(x)}{x} + e^{-x}$$

解微分方程可得

$$f(x) = Cx + x\mathrm{Ei}(-x)$$

又 $f(1) = -\mathrm{Ei}(-1)$ 可知 $C = -2\mathrm{Ei}(-1)$ 从而 $f(x) = -2\mathrm{Ei}(-1)x + x\mathrm{Ei}(-x)$. □

9. 解答:

(1)

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot\left[\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2x^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\alpha}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+y^2x^2)}\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\alpha}\frac{\pi}{2y+2}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha) \end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}e^{-t\alpha^2}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\cos\beta x\cdot e^{-tx^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-t\alpha^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{\beta^2}{4t}}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-y^2\alpha^2-\frac{\beta^2}{4y^2}}\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}e^{\alpha\beta}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\alpha y+\frac{\beta}{2y}\right)^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{\pi}e^{\alpha\beta}}{\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-(t^2+2\alpha\beta)}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}e^{-\alpha\beta}}{\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\pi e^{-\alpha\beta}}{2\alpha}\end{aligned}$$

注: (1) 这里利用了练习题 12.3.3 第 7 题的结论.

(2) 本题是吉米多维奇第 5 册第 3829 题和本章参考题第 15 题的特例. □

10. 解答: 由

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-2\alpha x^2}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\alpha}\int_0^1\frac{(1-\alpha^2x^2)-1}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\alpha}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{\alpha}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\end{aligned}$$

可知

$$I(\alpha)=\int I'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\pi\ln(1+\sqrt{1-\alpha^2})+C$$

而 $I(0)=0=\pi\ln 2+C$, 则 $C=-\pi\ln 2$ 从而 $I(\alpha)=\pi\ln(1+\sqrt{1-\alpha^2})-\pi\ln 2$. □

11. 解答: 容易验证积分和求导换序的条件, 则

$$\begin{aligned}I'(y)&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[e^{-x^2}\cos(2yx)\right]\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\sin(2yx)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\sin(2yx)\mathrm{d}e^{-x^2}=-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}\sin(2yx)\\&=-2y\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2yx)\mathrm{d}x=-2yI(y)\end{aligned}$$

解微分方程

$$I'(y)=-2yI(y)$$

可得 $I(y)=Ce^{-y^2}$, 又 $I(0)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 则 $I(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2}$.

注: (1) 周民强第三册 P201 例 5.2.15(1) 给出了一般的通式.

(2) 其他证明方法可参见徐森林下册 P371 第 715 题.

(3) 利用留数的证明方法可参见钟玉泉《复变函数论》P249 例 6.17. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§23.3.5　练习题　学员: d39

1. 解答:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\ln\frac{1}{x}}} \xlongequal{x=e^{-t}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \xlongequal{t=2x^2} 2\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi};$

(2) 令 $\dfrac{x}{1+x}=t$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t = \mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)\\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

□

2. 解答:

(1) 令 $\sin x = t$, 再令 $t^2=u$, 即得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^\alpha x\mathrm{d}x &= \int_0^1 t^\alpha\left(1-t^2\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-u)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha+1}{2}\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\end{aligned}$$

(2) 令 $1+x=t$, 再令 $t=2u$, 即得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1(1+x)^a(1-x)^b\mathrm{d}x &= \int_0^2 t^a(2-t)^b\mathrm{d}t = 2^{a+b+1}\int_0^1 u^a(1-u)^b\mathrm{d}u\\ &= 2^{a+b+1}\mathrm{B}(a+1,b+1) = 2^{a+b+1}\frac{a!b!}{(a+b+1)!}\end{aligned}$$

□

3. 解答: 由 23.3.1 第 3 条性质可知

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,n) = \frac{(p-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} &= \frac{(p-1)!(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)\cdots p(p-1)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}\end{aligned}$$

□

4. 解答: 只需证明 $(\ln\Gamma(x))''\geqslant 0$. 事实上, 由

$$(\ln\Gamma(x))'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x)-[\Gamma'(x)]^2}{\Gamma^2(x)}$$

而由 Cauchy-Schwarz 不等式可知

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}\Gamma''(x)\Gamma(x)&=\left(\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln^2 t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)\\&\geqslant\left(\int_0^{+\infty}\sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\cdot\sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\ln t\mathrm{d}t\right)^2\\&=\left(\int_0^{+\infty}t^{x-1}\ln t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^2=[\Gamma'(t)]^2\end{aligned}$$

故 $(\ln\Gamma(x))''\geqslant 0$, 即 $\ln\Gamma(x)$ 是下凸函数. □

5. 解答:

(1)$\Gamma(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\xlongequal{x=u^2}\int_0^{+\infty}u^{2p-2}\mathrm{e}^{-u^2}2u\mathrm{d}u=2\int_0^{+\infty}u^{2p-1}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$;

(2) 由 (1) 可知

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=2\int_0^{+\infty}u^{2p-1}e^{-u^2}\mathrm{d}u\cdot 2\int_0^{+\infty}v^{2q-1}\mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v\\&=4\iint\limits_{[0.+\infty)^2}u^{2p-1}v^{2q-1}\mathrm{e}^{-\left(u^2+v^2\right)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\lim_{A\to+\infty}4\iint\limits_{[0,A]^2}u^{2p-1}v^{2q-1}\mathrm{e}^{-\left(u^2+v^2\right)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

(3) 作极坐标变换可得

$$\begin{aligned}&\lim_{A\to+\infty}4\iint\limits_{D(A)}u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-\left(u^2+v^2\right)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\=&\lim_{A\to+\infty}4\int_0^A r^{2(p+q)-1}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\\=&\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q)\end{aligned}$$

同理有

$$\lim_{A\to+\infty}4\iint\limits_{D(\sqrt{2}A)}u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-\left(u^2+v^2\right)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q)$$

显然结论得证.

(4) 由于 $D(A)\subset[0,A]^2\subset D(\sqrt{2}A)$, 故

$$\iint\limits_{D(A)}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant\iint\limits_{[0,A]^2}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant\iint\limits_{D(\sqrt{2}A)}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

令 $A\to+\infty$ 得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q)\leqslant\Gamma(p)\Gamma(q)\leqslant\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q)\\\Rightarrow&\Gamma(p)\Gamma(q)=\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q)\Rightarrow\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\end{aligned}$$

□

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§23.4.2　参考题　学员: d39

1. 解答:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t [f(x+a(t-\tau),\tau)+f(x-a(t-\tau),\tau)]\mathrm{d}\tau \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2a}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2a}\int_0^t [f(x+a(t-\tau),\tau)-f(x+a(t-\tau),\tau)]\mathrm{d}\tau \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{2}[f(x,t)+f(x,t)] + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}[f(x+a(t-\tau),\tau)+f(x-a(t-\tau),\tau)]\mathrm{d}\tau \\
&= f(x,t) + \frac{1}{2}a\int_0^t [f_1'(x+a(t-\tau),\tau)-f_1'(x-a(t-\tau),\tau)]\,\mathrm{d}\tau \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2a}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}[f(x+a(t-\tau),\tau)-f(x+a(t-\tau),\tau)]\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2a}\int_0^t [f_1'(x+a(t-\tau),\tau)-f_1'(x+a(t-\tau),\tau)]\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

综上就有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

注: 本题的出题背景是偏微分方程中的达朗贝尔公式, 相关内容可见陈祖墀《偏微分方程》的 3.1.3 节. □

2. 解答: 计算得

$$\begin{aligned}
J_n'(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + \left(x^2-n^2\right)J_n(x) \\
=& -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\left(x^2\sin^2\varphi + n^2 - x^2\right)\cos(n\varphi - x\sin\varphi) - x\sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi \\
=& -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\left(n^2 - x^2\cos^2\varphi\right)\cos(n\varphi - x\sin\varphi) - x\sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi \\
=& -\frac{1}{\pi}(n + x\cos\varphi)\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\Big|_0^\pi = 0
\end{aligned}$$

命题得证. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

3. 解答:

(1) 由 $f(0)=0$, 分部积分可知

$$\varphi(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}\sqrt{x-t}=2\int_0^x\sqrt{x-t}f'(t)\mathrm{d}t$$

利用含参变量积分的求导法则可知

$$\varphi'(x)=\int_0^x\frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t,\quad x\in(0,1]$$

再考虑

$$\varphi'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}2\int_0^x\frac{\sqrt{x-t}}{x}f'(t)\mathrm{d}t$$

考虑到 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 可设 $|f'(x)|\leqslant M$. 则

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x\frac{\sqrt{x-t}}{x}f'(t)\mathrm{d}t\right|&\leqslant\int_0^x\left|\frac{\sqrt{x-t}}{x}\right||f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant M\int_0^x\frac{\sqrt{x-t}}{x}\mathrm{d}t\\&\leqslant M\int_0^x\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}t=M\sqrt{x}\to0\end{aligned}$$

所以 $\varphi'_+(0)=0$.

(2) 利用 (1) 的结论可知

$$\begin{aligned}&\int_0^x\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\int_0^t\frac{f'(s)}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t=\int_0^x\mathrm{d}t\int_0^t\frac{f'(s)}{\sqrt{(t-s)(x-t)}}\mathrm{d}s\\&=\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s\int_s^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-s)(x-t)}}=\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s\int_0^{x-s}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+s-s)(x-s-t)}}\\&=\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s\int_0^{x-s}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(x-s-t)}}=\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s\int_0^{x-s}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(\frac{x-s}{2}\right)^2-\left(t-\frac{x-s}{2}\right)^2}}\\&=\int_0^x f'(s)\arcsin\frac{t-\frac{x-s}{2}}{\frac{x-s}{2}}\bigg|_0^{x-s}\mathrm{d}s=\pi\int_0^x f'(s)\mathrm{d}s=\pi[f(x)-f(0)]=\pi f(x)\end{aligned}$$

移项即得结论.

注: (1) 额外定义 $\varphi(0)$ 并不是鸡肋, 同样 $\varphi'_+(0)$ 也不可以直接代入 $x=0$ 得出结论.

(2) 前半题的其他方法可参见裴礼文 P815 练习题 7.1.1. □

4. 解答: 由 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上处处有定义且单调知 $f(0^+)$ 存在. 注意到对任意 $\alpha>0$ 有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}f(0^+)\right|&=\left|\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}f(0^+)\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left|\int_0^A[f(x)-f(0^+)]\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{+\infty}f(0^+)\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

由积分中值定理可知对于任意 $0<\delta<A$ 存在 $\xi_1\in[0,\delta],\xi_2\in[\delta,A]$ 使得

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}&\left|\left(\int_0^\delta+\int_\delta^A\right)[f(x)-f(0^+)]\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\right|\\\leqslant&[f(\delta)-f(0^+)]\left|\int_{\xi_1}^\delta\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x\right|+[f(A)-f(0^+)]\left|\int_{\xi_2}^A\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|\\=&[f(\delta)-f(0^+)]\left|\int_{\alpha\xi_1}^{\alpha\delta}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|+[f(A)-f(0^+)]\left|\int_{\alpha\xi_2}^{\alpha A}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

令 $\alpha\to+\infty,\delta\to0^+$ 注意积分收敛的 Cauchy 准则以及 α 的一致性, 即可知

$$\left|\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}f(0^+)\right|\to0$$

即证命题. □

5. 解答: 换元可知

$$F(t)=\int_0^{+\infty}e^{-y}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$, 故对 $\exists M>0,\forall x>M,|f(x)|\leqslant\alpha+1$, 而由题设在 $[0,M]$ 上 $f(x)$ 也有界, 即存在 $\beta>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant\beta,\forall x\in[0,M]$. 取 $\gamma=\max\{\alpha,\beta\}$ 则 $|f(x)|\leqslant\gamma$. 则

$$\int_0^{+\infty}e^{-y}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y\leqslant\int_0^{+\infty}\gamma e^{-y}\mathrm{d}y<+\infty$$

由 Weierstrass 判别法 $F(t)$ 关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 于是

$$\lim_{t\to+\infty}F(t)=\int_0^{+\infty}e^{-y}\lim_{t\to+\infty}f\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y=\alpha\int_0^{+\infty}e^{-y}\mathrm{d}y=\alpha$$

命题得证. □

6. 解答:

(1) 固定 t, 由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\left[\int_A^B f(t+u)f(u)\mathrm{d}u\right]^2&\leqslant\int_A^B f^2(t+u)\mathrm{d}u\int_A^B f^2(u)\mathrm{d}u\\&=\int_{A+t}^{B+t}f^2(u)\mathrm{d}u\int_A^B f^2(u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

其中 A,B 充分大或充分小, 则 $g(t)$ 对每一个 t 都存在. 由 Weierstrass 判别法可知它对 t 是一致收敛的, 而 $f(t)\in C(-\infty,+\infty)$ 故 $g(t)\in C(-\infty,+\infty)$. 又由显然

$$\left[\int_A^B f(t+u)f(u)\mathrm{d}u\right]^2\leqslant\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(u)\mathrm{d}u\right]^2<+\infty$$

令 $A\to-\infty,B\to+\infty$, 由极限保号性可知 $g(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(2) 换元且由 (1) 可知存在 $M>0$ 使得

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/4\varepsilon}g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}g(2\sqrt{\varepsilon}x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

由 Weierstrass 判别法知左边的含参变量积分积分对 ε 一致收敛, 从而就有

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/4\varepsilon}g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}g(0)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$$

得证命题. □

7. 解答:

(1) 考虑

$$f(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nx}^{(n+1)x}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^{a}}\mathrm{d}x$$

令 $x=t+n\pi$, 则

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha}t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{1-e^{-\pi}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha}t}\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha}t}\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

对任意 $0<b<1$, 对 $\alpha\in[0,b]$, 右端二积分分别以 $0,\pi$ 为奇点, 都以 $\sin^{-b}t$ 作为优函数, 因此它们在 $[0,b]$ 上一致收敛, 即 $f(\alpha)$ 在 $(0,1)$ 上内闭一致收敛, 故 $f(\alpha)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

(2) 由 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上有界设 $|f(t)|<M$. 考虑对每个 $t\in[0,1]$, $u(t,\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{|t-\alpha|}}$ 是关于 α 在 $(0,1)$ 上的连续函数. 故对任给的 $\varepsilon>0$ 和某个 $\alpha_0\in(0,1)$, 存在 $\delta>0$, 只要 $|\alpha-\alpha_0|<\delta$ 就有 $|u(t,\alpha)-u(t,\alpha_0)|<\varepsilon$, 从而

$$|g(\alpha)-g(\alpha_0)|=\int_0^1 f(t)\left[u(t,\alpha)-u(t,\alpha_0)\right]\mathrm{d}t<M\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知 $g(\alpha)$ 在 $(0,1)$ 上连续. □

8. 解答: 几何体位于 $y\geqslant0$ 的四个卦限内, 由对称性可知所求体积等于位于第一卦限体积的 4 倍. 球坐标变换后可从方程内可解得

$$r=\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\sin\theta}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}}$$

故

$$\begin{aligned}V&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\sin\theta}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}}}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

注: 这里用到了

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\mathrm{d}\varphi \xlongequal{t=\tan\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t^4}{\cdot t\,(1+t^4)}$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{1}{4}}(1+u)} = \frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \square$$

9. 解答: 令 $x = ar\cos^{2n}\varphi\cos^{2n}\psi, y = br\sin^{2n}\varphi\cos^{2n}\psi, z = cr\sin^{2n}\psi$, 则

$$|J| = 4n^2abcr^2\sin^{2n-1}\varphi\cos^{2n-1}\varphi\cos^{4n-1}\psi\sin^{2n-1}\psi$$

于是

$$\begin{aligned}
M(0) &= 4n^2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^2\sin^{2n-1}\varphi\cos^{2n-1}\varphi\sin^{4n-1}\psi\sin^{2n-1}\psi\mathrm{d}r \\
&= 4n^2abc\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(n,n)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(2n,n) = \frac{abcn^2}{3}\cdot\frac{\Gamma(n)^2}{\Gamma(2n)}\cdot\frac{\Gamma(2n)\Gamma(n)}{\Gamma(3n)} = \frac{abcn^2}{3}\cdot\frac{\Gamma(n)^3}{\Gamma(3n)} \\
M_x(1) &= 4n^2a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^3\cos^{4n-1}\varphi\cos^{6n-1}\psi\sin^{2n-1}\varphi\sin^{2n-1}\psi\mathrm{d}r \\
&= a^2bcn^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\cos^{4n-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{6n-1}\psi\sin^{2n-1}\psi\mathrm{d}\psi \\
&= a^2bcn^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(n,2n)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(3n,n) = \frac{a^2bcn^2}{4}\cdot\frac{\Gamma(n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)}\cdot\frac{\Gamma(3n)\Gamma(n)}{\Gamma(4n)}
\end{aligned}$$

从而质心的 x 坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_x(1)}{M(0)} = \frac{3a}{4}\cdot\frac{\Gamma(2n)\Gamma(3n)}{\Gamma(n)\Gamma(4n)} \qquad \square$$

10. 解答: 记星形线所围成的图形为 D, 则其对 x 轴的惯性矩为

$$I_x = \iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

记 D_1 为第一象限部分, 由对称性

$$\begin{aligned}
I_x &= 4\iint_{D_1} y^2dxdy = 4\int_0^R dx\int_0^{\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}} y^2dy = \frac{4}{3}\int_0^R\left(R^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{x=R\sin^3 t} \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^{\frac{2}{3}}-R^{\frac{2}{3}}\sin^2 t\right)^{\frac{9}{2}}3R\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t = 4R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}t\sin^2 t\mathrm{d}t \\
&= 2R^4\mathrm{B}(5.5,1.5) = 2R^4\cdot\frac{\Gamma(5.5)\Gamma(1.5)}{\Gamma(7)} = 2R^4\cdot\frac{21}{1024}\cdot\Gamma(0.5)^2 = \frac{21}{512}\pi R^4
\end{aligned}$$

注: 最后利用了余元公式 (命题 23.3.3) 以及 23.3.4 中 $\Gamma(x)$ 函数的第二条性质. $\square$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

11. 解答: 由已知 $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u$ 可知 $\forall \varepsilon>0, \exists T>0$ 使得

$$\int_T^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u<\varepsilon \tag{1}$$

令 $tx=u$, 则

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2x^2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}f\left(\frac{u}{t}\right)\mathrm{d}t$$

只要证明

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\left[f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right]\mathrm{d}u=0$$

因为 $f(x)\in C[0,1]$, 对上述 $\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $|u/t|<\delta$ 时有

$$\left|f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right|<\varepsilon \tag{2}$$

且存在 $M>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant M, \forall x\in[0,1]$. 结合 (1)(2) 式可知当 t 充分大时有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t e^{-u^2}\left[f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right]\mathrm{d}u\right|&\leqslant 2M\int_T^t e^{-u^2}\mathrm{d}u+\int_0^T e^{-u^2}\left|f\left(\frac{u}{t}\right)-f(0)\right|\mathrm{d}u\\&\leqslant 2M\varepsilon+\varepsilon\frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知命题得证. □

12. 解答: 易知 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 且固定 $y\in[0,+\infty)$, e^{-xy} 关于 x 是单调递减的有界函数, 由 Abel 判别法可知 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 故积分与极限可换序, 即有

$$\lim_{y\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-xy}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

命题得证. □

13. 解答:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\cos x^p\mathrm{d}x&=\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{p}-1}\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{p\Gamma(1-1/p)}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{p}}e^{-tu}\mathrm{d}u\right)\cos t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{p\Gamma(1-1/p)}\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}e^{-tu}\cos t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{p\Gamma(1-1/p)}\int_0^{\infty}\frac{u^{1-\frac{1}{p}}}{1+u^2}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{p\Gamma(1-1/p)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{1-\frac{1}{p}}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{p\Gamma(1-1/p)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{1-\frac{1}{p}}\theta\cos^{\frac{1}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2p\Gamma(1-1/p)}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2p},1-\frac{1}{2p}\right)=\frac{1}{2p\Gamma(1-1/p)}\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2p}\right)\\&=\frac{1}{2p\Gamma(1-1/p)}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/(2p))}=\frac{1}{2p}\cdot\sin\frac{\pi}{p}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cdot\frac{1}{\sin(\pi/(2p))}=\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

注: (1) 类似还可求得

$$\int_0^{+\infty} \sin x^p \mathrm{d}x = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p}$$

代入 $p=2$ 便可得到 Fresnel 积分.

(2) 本题也可以使用留数通过围道积分得到. □

14. 解答: 令 $1-x=t$ 可得

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\Gamma(1-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\mathrm{d}x$$

和原积分相加利用余元公式可知

$$\begin{aligned}
&2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\mathrm{d}x\\
&=\ln\pi - \int_0^1 \ln\sin\pi x\mathrm{d}x = \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln\sin t\mathrm{d}t = \ln\pi - \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln\sin t\mathrm{d}t\right]\\
&=\ln\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x = \ln\pi - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = \ln 2\pi
\end{aligned}$$

于是得到 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x = \ln\sqrt{2\pi}$. □

15. 解答: 借助练习题 23.2.6 第 9 题 (2) 的结论可知

$$I_1 = \frac{\pi}{2a}e^{-ab}$$

注意到 (由 Dirichlet 判别法易验证求导和积分换序的条件)

$$\frac{\partial I_k}{\partial a} = -2ak\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^{k+1}} = -2akI_{k+1}$$

这就给出了 I_k 的递推公式. 而 I_k 再对 b 求导就可发现 $J_k = -\dfrac{\partial I_k}{\partial b}$. □

16. 解答: 记

$$f_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

则

$$\ln f_n(x) = \ln n! + x\ln n - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$$

对 x 求导可知

$$\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \ln n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k} = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x+k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

取 $x=1$ 可知

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{f_n'(1)}{f_n(1)} = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

取极限可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n'(1)}{f_n(1)} = -\gamma$$

另一方面由 Gauss 无穷乘积分解公式可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

结合以上可知

$$\Gamma'(1) = -\gamma\Gamma(1) = -\gamma$$

注: 其他证明方法可参见菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第二卷 P641. □

17. 解答:

(1) 由 n 次根单位分解式可知

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2k\pi \mathrm{i}}{n}} \right)$$

(2) 在 (1) 中令 $x \to 1$ 可知

$$n = \lim_{x\to 1} \frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} \right)$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} \right| = \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n} \right)^2 + \left(\sin\frac{2k\pi}{n} \right)^2}$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n} \right)} = \prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$$

移项即证.

(3) 利用余元公式和 (2) 的结论可知

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \left[\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \right] \cdots \left[\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$
$$= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}} \cdots \frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$$

两边开方即证命题.

注: 其他方法参见徐森林下册 P360 第 700 题. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第二十四章　曲线积分

§24.1.3　练习题　学员: d39

1. 解答:

(1) 曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$, 故

$$\mathrm{d}s = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\mathrm{d}t = 3a\cos t\sin t\mathrm{d}t \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

则

$$\int_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s = 4a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right)3a\cos t\sin t\mathrm{d}t = 4a^{\frac{7}{3}}$$

注: 其他方法可参见吉米多维奇第 6 册 P118 第 4224 题.

(2) 凸围线由三段组成, 分别是直线段 $\varphi = 0(0 \leqslant r \leqslant a)$, 圆弧段 $r = a\,(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4)$, 直线段 $\varphi = \pi/4(0 \leqslant r \leqslant a)$. 弧长的微分相应的是 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}r$, $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + r'^2}\mathrm{d}\varphi = a\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}s = \mathrm{d}r$. 于是

$$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_0^a e^r\mathrm{d}r + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a\mathrm{d}\varphi + \int_0^a \mathrm{e}^r\mathrm{d}r = 2\left(\mathrm{e}^a - 1\right) + \frac{\pi a e^a}{4}$$

(3) 极坐标方程为 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, 弧长的微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + r'^2}\mathrm{d}\varphi = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

于是

$$\int_C |y|\mathrm{d}s = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi = 4a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2(2-\sqrt{2})$$

(4) 弧长的微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_C \frac{\mathrm{d}s}{y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}}{a^2\,\mathrm{ch}^2\dfrac{x}{a}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{sh}\dfrac{x}{a}\right)}{1 + \mathrm{sh}^2\dfrac{x}{a}} = \frac{1}{a}\arctan\left(\mathrm{sh}\frac{x}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}$$

(5) 由曲线方程得

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{a^2} + y^2} = \frac{y}{a}\sqrt{y^2 + a^2}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

从而曲线的参数方程可取为

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{a} \\ y = y \\ z = \dfrac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2} \end{cases}$$

弧长的微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2y^2+a^2}{a\sqrt{y^2+a^2}}\right)^2}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{8y^6+9a^2y^2+2a^6}{a^2\left(y^2+a^2\right)}}\mathrm{d}y$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_c z\mathrm{d}s = \int_0^a \frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}\sqrt{\frac{8y^3+9a^2y^2+2a^4}{a^2\left(y^2+a^2\right)}}\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{8}}{a^2}\int_0^a y\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\mathrm{d}y \\
=&\frac{\sqrt{2}}{a^2}\int_0^a \sqrt{\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right)^2 - \frac{17a^4}{16^2}}\mathrm{d}\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right) \\
=&\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\frac{y^2+\frac{9a^2}{16}}{2}\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4} - \frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\left(y^2+\frac{9a^2}{16}+\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\right)\right]\Bigg|_0^a \\
=&\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\left(\frac{25a^4}{64}\sqrt{\frac{19}{2}} - \frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}\right) - \left(\frac{9a^4}{64} - \frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\frac{17a^2}{16}\right)\right] \\
=&\frac{\sqrt{2}}{a^2}\cdot\frac{25a^4\sqrt{38}-18a^4}{128} + \frac{\sqrt{2}}{a^2}\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\frac{17a^2/16}{\left(25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2\right)/16} \\
=&\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right]
\end{aligned}$$

□

2. 解答:

(1) 当 $|x_0|<a$ 时弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2}+\frac{a^4}{4\left(a^2-x^2\right)^2}} = \frac{3a^2-2x^2}{2\left(a^2-x^2\right)}\mathrm{d}x$$

于是, 当 $x_0\geqslant 0$ 时有

$$s = \int_0^{x_0}\frac{3a^2-2x^2}{2\left(a^2-x^2\right)}\mathrm{d}x = \frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}+x_0 = |z_0|+|x_0|$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

当 $x_0<0$ 时也有

$$s=\int_{x_0}^{0}\frac{3a^2-2x^2}{2\left(a^2-x^2\right)}\mathrm{d}x=-\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}-x_0=|z_0|+|x_0|\ .$$

(2) 令 $x=\sqrt{a^2-z^2}\cos\varphi, y=\sqrt{a^2-z^2}\sin\varphi$, 不妨设 $z>0$, 则有

$$z=\sqrt{a^2-\left(x^2+y^2\right)}=\sqrt{a^2\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\varphi}\right)}=a\ \mathrm{th}\ \varphi$$

而

$$\sqrt{a^2-z^2}=\sqrt{a^2\left(1-\mathrm{th}^2\,\varphi\right)}=\frac{a}{\mathrm{ch}\,\varphi}$$

故曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{a\cos\varphi}{\mathrm{ch}\,\varphi}\\ y=\dfrac{a\sin\varphi}{\mathrm{ch}\,\varphi}\\ z=a\,\mathrm{th}\,\varphi\end{cases}$$

弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\mathrm{d}\varphi=a\sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2\varphi+\mathrm{sh}^2\,\varphi+1}{\mathrm{ch}^4\,\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\sqrt{2}a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{ch}\varphi}$$

于是弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{\varphi}\sqrt{2}a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{ch}\,\varphi}=\sqrt{2}a\int_0^{\varphi}\frac{2}{\mathrm{e}^{\varphi}+\mathrm{e}^{-\varphi}}\mathrm{d}\varphi=2\sqrt{2}a\int_0^{\varphi}\frac{1}{1+\left(\mathrm{e}^{\varphi}\right)^2}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\varphi}\right)\\&=2\sqrt{2}a\arctan\mathrm{e}^{\varphi}\Big|_0^{\varphi}=2\sqrt{2}a\left(\arctan e^{\varphi}-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

由 $z=a\tan\varphi$ 知

$$\begin{aligned}&z\left(\mathrm{e}^{\varphi}+\mathrm{e}^{-\varphi}\right)=a\left(\mathrm{e}^{\varphi}-\mathrm{e}^{-\varphi}\right)\Rightarrow z\left(\mathrm{e}^{2\varphi}+1\right)=a\left(\mathrm{e}^{2\varphi}-1\right)\\\Rightarrow&e^{2\varphi}=\frac{a+z}{a-z}\Rightarrow e^{\varphi}=\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}\end{aligned}$$

又因为

$$\tan\left(\arctan\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z}=\tan\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$$

所以

$$\arctan\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

综上就有

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$s=\sqrt{2}a\arctan\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

当 $z<0$ 时同理可得

$$s=\sqrt{2}a\arctan\frac{-z}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

所以

$$s=\sqrt{2}a\arctan\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}$$ □

3. 解答: 弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x$$

质量为

$$M=\rho_0\int_0^b\mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x=a\rho_0\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}=\rho_0\sqrt{h^2-a^2}$$

这里是因为

$$h=a\mathrm{ch}\frac{b}{a}\Rightarrow\mathrm{ch}\frac{b}{a}=\frac{h}{a}\Rightarrow\mathrm{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{\mathrm{ch}^2\frac{b}{a}-1}=\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}$$

于是质心的坐标为

$$\begin{aligned}x_0&=\frac{\rho_0}{M}\int_0^b x\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{\rho_0}{M}\left[ab\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}-a^2\left(\mathrm{ch}\frac{b}{a}-1\right)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\left[b\sqrt{h^2-a^2}-a^2\left(\frac{h}{a}-1\right)\right]=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}\\y_0&=\frac{\rho_0}{M}\int_0^b y\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{a\rho_0}{M}\int_0^b\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{a\rho_0}{M}\int_0^b\frac{1+\mathrm{ch}\,2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{a\rho_0}{M}\left[\frac{x}{2}+\frac{a}{4}\mathrm{sh}\frac{2x}{a}\right]\Big|_0^b\\&=\frac{a\rho_0}{M}\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{4}\mathrm{sh}\frac{2b}{a}\right)=\frac{a}{\sqrt{h^2-a^2}}\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right)=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}\end{aligned}$$ □

4. 解答: 记 $a=s^{-1}(0),b=s^{-1}(L)$, 由公式 (24.1) 可知

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s=\int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))|\boldsymbol{x}'(t)|\mathrm{d}t$$

而

$$|\boldsymbol{x}'(t)|=s'(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\Rightarrow|\boldsymbol{x}'(s)|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}=1$$

$$\Rightarrow\int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))|\boldsymbol{x}'(t)|\mathrm{d}t=\int_0^L f(\boldsymbol{x}(s))|\boldsymbol{x}'(s)|\mathrm{d}s=\int_0^L f(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s$$

从而命题得证.

注: 这是微分几何曲线论中曲线的弧长参数化, 这里的 $\boldsymbol{x}(s)$ 称为曲线 Γ 的自然参数. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§24.2.4　练习题　学员: d39

1. 解答:

(1) 线段 AB 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=2t-1 \end{cases}$ $(1\leqslant t\leqslant 2)$, 故

$$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^2[t(2t-1)+2(t-1)]\mathrm{d}t=\frac{25}{6}$$

(2) 曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=2(t-1)^2+1 \end{cases}$ $(1\leqslant t\leqslant 2)$, 故

$$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^2\left[t\left(2t^2-4t+3\right)+\left(2t^2-5t+3\right)(4t-4)\right]\mathrm{d}t=\frac{10}{3}$$

(3) 线段 AD 和线段 DB 的参数方程分别为 $\begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases}$ $(1\leqslant t\leqslant 2)$ 和 $\begin{cases} x=2 \\ y=t \end{cases}$ $(1\leqslant t\leqslant 3)$

$$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^2 t\mathrm{d}t+\int_1^3(t-2)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}$$ □

2. 解答:

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{a(t-\sin t)}{a(1-\cos t)}\cdot a(1-\cos t)+\frac{a\sin t}{-a\cos t}\right]\mathrm{d}t=\left(\frac{\pi^2}{24}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a-\frac{\ln 3}{2}$$ □

3. 解答: 线段 AB, BD, DA 的参数方程分别为

$$\begin{cases} x=t\in[1,3] \\ y=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2} \end{cases},\quad \begin{cases} x=3 \\ y=t\in[1,2] \end{cases},\quad \begin{cases} x=t\in[1,3] \\ y=1 \end{cases}$$

注意到曲线的方向, 可知

$$\begin{aligned}\int_C(x+y)^2\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=&\int_1^3\left[\left(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(t^2-\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)^2\right)\right]\mathrm{d}t\\&+\int_2^1(9-t^2)\mathrm{d}t+\int_3^1(t+1)^2\mathrm{d}t\\=&28-\frac{20}{3}-\frac{56}{3}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

注: 由于曲线是封闭的, 也可用 Green 公式转化为二重积分计算. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

4. 解答: 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2/2 \end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2)$, 故

$$\int_C 4xy^2\mathrm{d}x-3x^4\mathrm{d}y=\int_0^2[t^5-3t^5]\mathrm{d}t=-\frac{64}{3}$$

□

5. 解答: 引入柱坐标变换

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z$$

则

$$\begin{aligned} x^2+y^2=2ax &\Rightarrow r^2=2ar\cos\theta\Rightarrow r=2a\cos\theta \\ x^2+y^2+z^2=2Rx &\Rightarrow r^2+z^2=2Rr\cos\theta \\ &\Rightarrow z=\sqrt{2Rr\cos\theta-r^2} \\ &\Rightarrow z=2\sqrt{aR-a^2}|\cos\theta| \end{aligned}$$

故曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=2a\cos^2\theta \\ y=2a\sin\theta\cos\theta \qquad (-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2) \\ z=\sqrt{2Rr\cos\theta-r^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\oint_C\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z \\ =&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+4(aR-a^2)\cos^2\theta\right](-4a\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\ &+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[4(aR-a^2)\cos^2\theta+4a^2\cos^4\theta](2a\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[4a^2\cos^2\theta]z'(\theta)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

注意到第一项和第三项积分内的函数都是奇函数, 第二项积分内的函数是偶函数, 故

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[4(aR-a^2)\cos^2\theta+4a^2\cos^4\theta](2a\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=2a^2R\pi$$

注: 也可利用 Stokes 公式计算, 参见吉米多维奇第六册第 4372 题. □

6. 解答: 若满足 (1), 则

$$\begin{aligned} \int_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}[(R\sin\varphi\sin\theta)(-R\sin\varphi\sin\theta)+R\cos\varphi(R\sin\varphi\cos\theta)]\mathrm{d}\theta \\ &=-\pi R^2\sin^2\varphi \end{aligned}$$

若满足 (2), 则

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}\int_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=&\int_0^{\pi}[(R\sin\varphi\sin\theta)(R\cos\varphi\cos\theta)+R\cos\varphi(R\cos\varphi\sin\theta)\\&+R\sin\varphi\cos\theta(-R\sin\varphi)]\mathrm{d}\varphi\\=&\frac{\pi}{2}\cdot R^2\sin\theta-\frac{\pi}{2}\cdot R^2\cos\theta=\frac{\pi R^2}{2}(\sin\theta-\cos\theta)\end{aligned}$$ □

7. 解答:

(1)

$$\begin{aligned}I=&\int_0^{2\pi}-\left(a^2\cos^2t+5a\sin t+\frac{3abt\sin t}{2\pi}\right)a\sin t+(5a\cos t\\&+3a^2\sin t\cos t-2)\,a\cos t+\left(3a^2\sin t\cos t-\frac{2bt}{\pi}\right)\frac{b}{2\pi}\mathrm{d}t\\=&\int_0^{2\pi}-\frac{3a^2bt\sin^2t}{2\pi}+5a^2\cos^2t-5a^2\sin^2t-\frac{b^2t}{\pi^2}\mathrm{d}t\\=&-\frac{3}{2}a^2b\pi-2b^2\end{aligned}$$

(2) 参数方程为 $\begin{cases}x=a\\y=0\ (0\leqslant t\leqslant b)\\z=t\end{cases}$, 故 $I=\int_0^b-4t\mathrm{d}t=-2b^2$. □

8. 解答: 由题意知

$$\begin{aligned}W=&\int_L y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z\\=&\int_0^{2\pi}\left[a\sin t(-a\sin t)-a\cos t(a\cos t)+\left(a\cos t+a\sin t+\frac{b}{2\pi}t\right)\left(\frac{b}{2\pi}\right)\right]\mathrm{d}t\\=&-a^2\pi-a^2\pi+b^2/2=b^2/2-2a^2\pi\end{aligned}$$ □

9. 解答: 记 $P=\dfrac{e^x}{1+y^2},Q=\dfrac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}$, 注意到

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

故积分与路径无关, 可以用直线段连接始末点作为新路径来计算, 即

$$\begin{aligned}W=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=&\int_0^1\left[\frac{e^t}{1+t^2}+\frac{2t(1-e^t)}{(1+t^2)^2}\right]\mathrm{d}t\\=&\int_0^1\frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_0^1(e^t-1)\mathrm{d}\frac{1}{t^2+1}\\=&\int_0^1\frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\frac{e^t-1}{t^2+1}\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t\\=&\frac{e-1}{2}\end{aligned}$$ □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§24.3.3 练习题 学员: d39

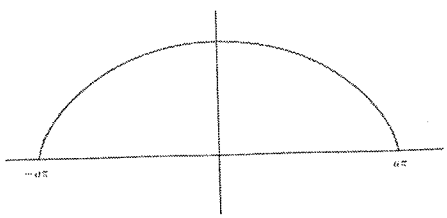
1. 解答:

(1) $\oint_C (x^2+xy)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(2x-x)\mathrm{d}y=0;$

(2) $\oint_C \ln\frac{2+y}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{x(y+1)}{2+y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\left[\frac{y+1}{2+y}-\frac{1}{2+y}\right]\mathrm{d}y=4-4\ln 3;$

(3) $\oint_C (x^2-y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=\iint_D(-2y+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0;$

(4)(a) 如图所示



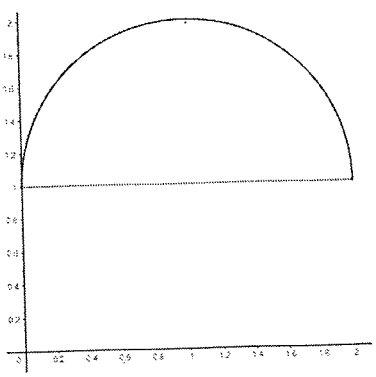
补充曲线

$$L: y=0,\quad -a\pi\leqslant x\leqslant a\pi$$

则由 Green 公式

$$I=\int_C+\int_L-\int_L=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-a\pi}^{a\pi}0\mathrm{d}x=0$$

(b) 如图所示



补充曲线

$$L: y=1,\quad 0\leqslant x\leqslant 2$$

则由 Green 公式

$$I=\int_C+\int_L-\int_L=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=-\arctan 2$$

□

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

2. 解答:

(1) 记 $P=yf(xy), Q=xf(xy)$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 由 Green 公式可知

$$\oint_C f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\iint\limits_D\left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

(2) 记 $P=x^{n-1}f(x^n+y^n), Q=y^{n-1}f(x^n+y^n)$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 由 Green 公式可知

$$\oint_C f(x^n+y^n)(x^{n-1}\mathrm{d}x+y^{n-1}\mathrm{d}y)=\iint\limits_D\left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

本题取 $n=2$ 即可.

注: 也可借助全微分, 参见吉米多维奇第 6 册第 4270 题. □

3. 解答: 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)$$

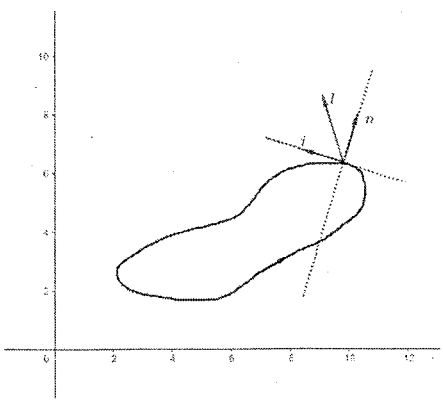
左右同乘 $\mathrm{d}s$ 可得

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x$$

于是, 由 Green 公式可知

$$\oint_L\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4S_D=36\pi$$ □

4. 解答: 如图所示



用 $\boldsymbol{t}$ 表示单位切向量, 用 $\boldsymbol{n}$ 表示单位法向量, 则从图中可知

$$(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{l},x)-(\boldsymbol{n},x)$$

故得

$$\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{l},x)\cos(\boldsymbol{n},x)+\sin(\boldsymbol{l},x)\sin(\boldsymbol{n},x)$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

但是

$$\sin(\boldsymbol{n},x)=\sin\left[(\boldsymbol{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\boldsymbol{t},x)$$
$$\cos(\boldsymbol{n},x)=\cos\left[(\boldsymbol{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin(\boldsymbol{t},x)$$

且

$$\cos(\boldsymbol{t},x)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\quad \sin(\boldsymbol{t},x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

因此有

$$\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\cos(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}y-\sin(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}x$$

利用 Green 公式, 并注意到 $\sin(\boldsymbol{l},x)$ 和 $\cos(\boldsymbol{l},x)$ 均为常数, 即得

$$\oint_C\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\oint_C[-\sin(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}x+\cos(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}y]=\iint_S 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$ □

5. 解答: 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, 由题意知 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$, 而使得 $X^2+Y^2=0$(即 $X=Y=0$) 的条件是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$, 故该方程组只有零解, 即只有在原点处能够使得 $X^2+Y^2=0$. 而

$$\begin{aligned}X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}x&=(a_{11}x+a_{12}y)(a_{21}\mathrm{d}x+a_{22}\mathrm{d}y)-(a_{21}x+a_{22}y)(a_{11}\mathrm{d}x+a_{12}\mathrm{d}y)\\&=\det(\boldsymbol{A})(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I=\oint_C\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

其中

$$P=-\frac{\det(\boldsymbol{A})y}{(a_{11}x+a_{12}y)^2+(a_{21}x+a_{22}y)^2},\quad Q=\frac{\det(\boldsymbol{A})x}{(a_{11}x+a_{12}y)^2+(a_{21}x+a_{22}y)^2}$$

容易算得当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\det(\boldsymbol{A})[(a_{11}^2+a_{21}^2)x^2-(a_{12}^2+a_{22}^2)y^2]}{[(a_{11}x+a_{12}y)^2+(a_{21}x+a_{22}y)^2]^2}$$

故积分与路径无关, 可以取新围线

$$C':(a_{11}x+a_{12}y)^2+(a_{21}x+a_{22}y)^2=r^2$$

其中 r 是充分小的正数. 于是利用 Green 公式得

$$\begin{aligned}I&=\oint_C\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\oint_{X^2+Y^2=r^2}\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}\\&=\frac{1}{r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=\frac{\det(\boldsymbol{A})}{r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$= \frac{\det(\boldsymbol{A})}{r^2} \iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2\det(\boldsymbol{A})}{r^2} \iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}\right| \mathrm{d}X\mathrm{d}Y$$
$$= \frac{2\det(\boldsymbol{A})}{r^2} \cdot \frac{1}{|\det(\boldsymbol{A})|}\pi r^2 = 2\pi \mathrm{sgn}(\det(\boldsymbol{A}))$$

命题得证. □

6. 解答: 记

$$P = \frac{x-y}{x^2+4y^2}, \quad Q = \frac{x+4y}{x^2+4y^2}$$

注意到

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

故积分与路径无关, 可取新路径为圆线

$$C: x^2+4y^2 = \varepsilon^2$$

则有

$$I = I_1 + I_2 = \oint_{L-C} \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2} + \int_C \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$

由 Green 公式可知 $I_1 = 0$, 而

$$I_2 = \int_C \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_C (x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y$$
$$= \frac{2}{\varepsilon^2} \iint\limits_{x^2+4y^2\leqslant\varepsilon^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}\pi = \pi$$

故可知 $I = \pi$. □

7. 解答:

(1)

$$S = \frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{3}{8}ab\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi ab$$

(2) 作代换 $y = tx$, 可得曲线参数方程

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}(0\leqslant t\leqslant +\infty)$$

且

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$$

从而

$$S = \frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t}\right]\Big|_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}$$

(3) 作代换 $y = \dfrac{b}{a}xt$, 可得曲线参数方程

$$x = \frac{act^n}{1+t^{2n+1}}, \quad y = \frac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}} \quad (0 \leqslant t < +\infty)$$

且

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{abc^2t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}\mathrm{d}t$$

从而

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x &= \frac{abc^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{abc^2}{2(2n+1)}\cdot\frac{1}{1+t^{2n+1}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{abc^2}{2(2n+1)} \end{aligned}$$

□

8. 解答:

(1) 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

故积分与路径无关

$$\begin{aligned} I &= \int_{(1,2)}^{(3,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{(3,2)}^{(2,4)}\Psi(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_1^3\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_2^4\Psi(y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

(2) 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

故积分与路径无关

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{(1,0)}^{(6,0)} + \int_{(6,0)}^{(6,8)}\right)\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \\ &= \ln 6 + \frac{1}{2}\ln 100 - \frac{1}{2}\ln 36 = \ln 10 \end{aligned}$$

□

$\int_1^6 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^8 \frac{y\,\mathrm{d}y}{36+y^2}$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

9. 解答:

(1) 记

$$M_1 = -y\sqrt{x^2+y^2+1}, \qquad M_2 = -x(x^2+y^2)$$
$$N_1 = x\sqrt{x^2+y^2+1}, \qquad N_2 = -y(x^2+y^2)$$

考虑方程

$$M_1\mathrm{d}x + N_1\mathrm{d}y = 0 \qquad (1)$$
$$M_2\mathrm{d}x + N_2\mathrm{d}y = 0 \qquad (2)$$

取 $\mu_1 = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2+1}}$ 乘于 (1) 式两边可见

$$-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{x}\mathrm{d}y = \mathrm{d}\frac{y}{x} = 0$$

故 (1) 的积分因子为 μ_1, 通解为 $\varphi_1(x,y) = \dfrac{y}{x} = C_1$.

而易验证 (2) 是一个恰当方程, 积分因子可看作 $\mu_2 = 1$, 按照 (24.12) 可求出它的通解是

$$\varphi_2(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{4} = C_2$$

然后设

$$\mu_1 g_1(\varphi_1) = \mu_2 g_2(\varphi_2)$$

即

$$\frac{g_1(y/x)}{x^2\sqrt{x^2+y^2+1}} = g_2\left[\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\right]$$

记 $y/x = t_1, x^2+y^2 = t_2$, 则有

$$1+t_1^2 = \frac{t_2}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{t_2}{1+t_1^2}}$$

方程转化为

$$\frac{1+t_1^2}{t_2\sqrt{t_2+1}}g_1(t_1) = g_2\left(\frac{t_2^2}{4}\right)$$

令 $g_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, 则

$$g_2\left(\frac{t_2^2}{4}\right) = \frac{1}{t_2\sqrt{t_2+1}}$$

令 $t_2 = 2\sqrt{x}$, 则

$$g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x}+1}\cdot 2\sqrt{x}}$$

于是取

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$M = g_2\left(\frac{t_2^2}{4}\right) = \frac{1}{t_2\sqrt{t_2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}(x^2+y^2)}$$

易验证

$$Mw = \left[-\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right]\mathrm{d}x + \left[\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right]\mathrm{d}y$$

在 $(x,y) \neq (0,0)$ 时是全微分, 按 (24.12) 即可求出原函数为

$$\varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1} + \arctan\frac{x}{y} + C$$

(2) 记

$$M_1 = x(ay+bx)^3, \qquad M_2 = axy^3$$
$$N_1 = y(ay+bx)^3, \qquad N_2 = bx^3y$$

考虑方程

$$M_1\mathrm{d}x + N_1\mathrm{d}y = 0 \qquad (1)$$
$$M_2\mathrm{d}x + N_2\mathrm{d}y = 0 \qquad (2)$$

取 $\mu_1 = \dfrac{1}{(ay+bx)^3}$ 乘于 (1) 式两边可见

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = 0$$

故 (1) 的积分因子为 μ_1, 通解为 $\varphi_1(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2} = C_1$.

取 $\mu_2 = -\dfrac{1}{x^3y^3}$ 乘于 (2) 式两边可见

$$-\frac{a}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{b}{y^2}\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right) = 0$$

故 (2) 的积分因子为 μ_2, 通解为

$$\varphi_2(x,y) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = C_2$$

然后设

$$\mu_1 g_1(\varphi_1) = \mu_2 g_2(\varphi_2)$$

即

$$\frac{g_1\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)}{(ay+bx)^3} = -\frac{g_2\left(\dfrac{ay+bx}{xy}\right)}{x^3y^3}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

取 $g_1(x)=-1, g_2(x)=\dfrac{1}{x^3}$, 则可满足上述方程. 于是取

$$M=\mu_1 g_1(\varphi_1)=\frac{1}{(ay+bx)^3}.$$

易验证

$$Mw=\left[x+\frac{axy^3}{(ay+bx)^3}\right]\mathrm{d}x+\left[y+\frac{bx^3y}{(ay+bx)^3}\right]\mathrm{d}y$$

在 $ay+bx\neq 0$ 时是全微分, 按 (24.12) 即可求出原函数为

$$\varphi(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{x^2y^2}{2(ay+bx)^2}+C$$

注: 本题采用的手段是常微分方程中的分组求积分因子, 该方法的具体详情参见方道元 2.2 节 (一般的常微分方程教材不会涉及). □

§24.5.2　参考题　学员: d39

第一组参考题　学员: d39

1. 解答: 由两类曲线积分的关系及 Cauchy 不等式可知

$$\begin{aligned}\left|\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\right| &= \left|\int_C [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_C |P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_C \sqrt{[P^2(x,y)+Q^2(x,y)]\,[\cos^2\alpha+\cos^2\beta]}\mathrm{d}s \\ &\leqslant M\int_C \mathrm{d}s = ML\end{aligned}$$

记

$$P(x,y)=\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2},\quad Q(x,y)=-\frac{x}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

则

$$P^2(x,y)+Q^2(x,y)=\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}\leqslant\frac{16}{(x^2+y^2)^3}$$

于是利用已证得的不等式可知

$$|I_R|\leqslant\frac{16}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{32\pi}{R^2}\to 0\quad(R\to+\infty)$$

即证 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R=0$.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

注: 推广结论及不同证法参见徐森林下册 P99 第 477 题. □

2. 解答: 只计算 (2), 取 $b=0$ 即得 (1).

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{x^2+y^2=R^2} \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\mathrm{d}s \\ &= R\int_0^{2\pi} \ln\sqrt{(R\cos\theta-a)^2+(R\sin\theta-b)^2}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \ln[R^2-2aR\cos\theta-2bR\sin\theta+(a^2+b^2)]\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

由辅助角公式及三角函数积分的周期性可知

$$\begin{aligned} I &= \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \ln[R^2-2R\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi)+(a^2+b^2)]\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \ln[R^2-2R\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta+(a^2+b^2)]\mathrm{d}\theta \\ &= R\int_0^{\pi} \ln[R^2-2R\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta+(a^2+b^2)]\mathrm{d}\theta \\ &= R\int_0^{\pi} \ln\left[1-2\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{R}\cos\theta+\frac{a^2+b^2}{R^2}\right]\mathrm{d}\theta+2\pi R\ln R \end{aligned}$$

由第十一章第二组参考题第 2 题的结论可知

$$I=\begin{cases} 2\pi R\ln R, & a^2+b^2<R^2 \\ 2\pi R\ln\sqrt{a^2+b^2}, & a^2+b^2>R^2 \end{cases}$$

注: 事实上根据第十一章第二组参考题第 2 题的结论, 当 $a^2+b^2=R^2$ 时结论也是成立的 (此时 $I=2\pi R\ln R$). □

3. 解答: 考虑

$$\begin{aligned} &\ln\sqrt{x^2+y^2}\oint f(\xi,\eta)\mathrm{d}s-u(x,y) \\ &= \oint_L f(\xi,\eta)\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\mathrm{d}s+\oint_L f(\xi,\eta)\ln\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s \\ &= \oint_L f(\xi,\eta)\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

我们只需要证明

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\oint f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\mathrm{d}s=0 \qquad (*)$$

即可证得充要性. 下面来证明 (*) 式成立.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

先由 $f(x,y)$ 在有界闭集上连续性可知存在 $M>0$ 使得

$$\left|f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\mathrm{d}s\right|\leqslant M\left|\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\mathrm{d}s\right|$$

令 $x=\rho\cos\varphi,y=\rho\sin\varphi,\xi=r\cos\theta,\eta=r\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned}\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}&=\ln\frac{\rho^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}\\&=-\ln\left[1+\left(\frac{r}{\rho}\right)^2-\frac{2r}{\rho}\cos(\theta-\varphi)\right]\end{aligned}$$

记 $r_0=\underset{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}{r(\theta)}$, 当 $\rho^2=x^2+y^2\to+\infty$ 时

$$\left|\left(\frac{r}{\rho}\right)^2-\frac{2r}{\rho}\cos(\theta-\varphi)\right|\leqslant\left(\frac{r}{\rho}\right)^2+\frac{2r}{\rho}\leqslant\left(\frac{r_0}{\rho}\right)^2+\frac{2r_0}{\rho}\to0$$

故当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时

$$\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\rightrightarrows0$$

关于 $(\xi,\eta)\in L$. 于是 $\forall\varepsilon>0,\exists\Delta>0$ 使得 $|x|>\Delta,|y|>\Delta$ 时有

$$\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\frac{\varepsilon}{lM}$$

其中 l 表示曲线 L 的长度. 则综上可知

$$\begin{aligned}\left|\oint_L f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\mathrm{d}s\right|&\leqslant\oint_L\left|f(\xi,\eta)\ln\frac{x^2+y^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right|\mathrm{d}s\\&\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{lM}\oint_L\mathrm{d}s=\varepsilon\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $(*)$ 式成立, 从而命题得证. □

4. 解答:

必要性: 若前者成立则用二重积分的极坐标代换 $(\xi=x-\rho\cos\theta,\eta=y-\rho\sin\theta))$ 可知

$$\pi r^2u(x,y)=\iint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant r^2}u(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\rho u(\rho(x-\cos\theta),\rho(y-\sin\theta))\mathrm{d}\rho$$

两边对 r 求导可知

$$2\pi ru(x,y)=\int_0^{2\pi}ru(r(x-\cos\theta),r(y-\sin\theta))\mathrm{d}\theta$$

另一方面把第一型曲线积分转化为定积分可知

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\oint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant r^2} u(\xi,\eta)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi} ru(r(x-\cos\theta),r(y-\sin\theta))\mathrm{d}\theta$$

故

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} ru(r(x-\cos\theta),r(y-\sin\theta))\mathrm{d}\theta=\oint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant r^2} u(\xi,\eta)\mathrm{d}s$$

即后者成立.

充分性: 反之若后者成立, 则先把第一型曲线积分转化为定积分后两边对 r 积分即可证得前者成立.

注: 事实上题设的两个条件都等价于调和函数的 (逆) 平均值定理, 并且可推广至 n 维. 关于 n 维情形调和函数的 (逆) 平均值定理可参见 GT《二阶椭圆型偏微分方程》定理 2.1 和 2.7 或柯朗《数学物理方法》第四章 1.3 节和 3.2 节, 低维特例可参看 26.2.2 性质 1 以及第二十六章第二组参考题第 1 题. □

5. 解答: 先由 Green 公式引出二重积分的分部积分公式, 即

$$\iint\limits_G fg_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial G} fg\mathrm{d}y-\iint\limits_G f_xg\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

$$\iint\limits_G fg_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial G} fg\mathrm{d}x-\iint\limits_G f_yg\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

只证第 (1) 式, 类似可得第 (2) 式: 由下式移项即可

$$\oint_{\partial G} fg\mathrm{d}y\overset{\text{Green}}{=\!=}\iint\limits_G (fg)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_G f_xg\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_G fg_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

现在在 (1) 中令 $g(x,y)=x$, 并注意到 f 在边界 ∂G 上为零, 则

$$\iint\limits_G f\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_G xf_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

运用 (2) 式我们还可以得到

$$\iint\limits_G f\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_G yf_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是由 Cauchy 不等式有

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\frac{1}{2}\left|\iint\limits_G (xf_x+yf_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{1}{2}\iint\limits_G \left(f_x^2+f_y^2\right)^{1/2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

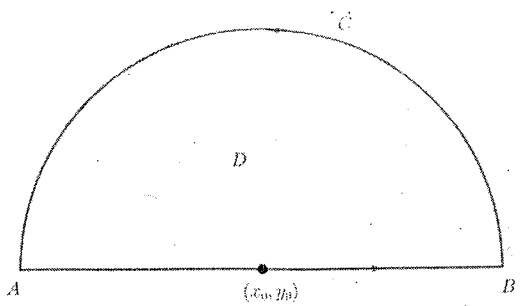
记 $M=\max\limits_G\left\{\left(f_x^2+f_y^2\right)^{1/2}\right\}$, 则

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\left|\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{M}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{3}a^3M$$

命题得证. □

6. 解答: 如图所示, 连接半圆周 C 的两个端点 A, B 形式闭路, 记半圆域为 D, 半径为 r.



则由 Green 公式和积分中值定理可知存在 $M \in D$ 使得

$$\begin{aligned}\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_{C+AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y &= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M^*}\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M^*}\cdot\frac{\pi r^2}{2}\end{aligned}$$

另一方面由积分中值定理可知存在 $\xi \in [x_0 - r, x_0 + r]$

$$\begin{aligned}\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y &= \int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0-r}^{x_0+r} P\left(x, y_0\right)\mathrm{d}x \\ &= P\left(\xi, y_0\right)\int_{x_0-r}^{x_0+r}\mathrm{d}x \\ &= P(\xi, y_0)\cdot 2r\end{aligned}$$

结合来看就有

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M^*}\cdot\frac{\pi r}{2} = P\left(\xi, y_0\right)\cdot 2$$

此式对于 $\forall r > 0$ 都成立, 则令 $r \to 0^+$ 可得 $P(x_0, y_0) = 0$, 再由 (x_0, y_0) 的任意性可知 $P(x, y) = 0$. 再由上式可知

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{M^*} = 0$$

再令 $r \to 0^+$ 可得 $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$. 由 (x_0, y_0) 的任意性即知 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$ 也成立. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第二组参考题 学员: d39

1. 解答: 考虑 D 内任一点 (x,y), 存在以 (x,y) 为中心的开矩形 (只要区域足够小, 向量的形变就足够小), 使对于任一条位于开矩形及其边界上的逐段光滑定向闭曲线 Γ 有

$$\frac{\boldsymbol{F}(x_1,y_1)}{|\boldsymbol{F}(x_1,y_1)|}\neq-\frac{\boldsymbol{F}(x_2,y_2)}{|\boldsymbol{F}(x_2,y_2)|},\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\Gamma$$

即对于 Γ 内的任意两点, 对应的向量不反向. 如果 $\gamma(\boldsymbol{F},\Gamma)\geqslant 1$, 则必然会导致向量场内的向量在旋转一周的过程中产生反向的一刻, 这就说明了 $\gamma(\boldsymbol{F},\Gamma)=0$. 注意到 D 是有界闭域, 故由有限覆盖定理, 可选取有限个满足上述条件的开矩形 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 覆盖住 D. 将 ∂D 剖分成各部分进入这有限个开矩形 (即 ∂D 可以由 D_i 内的闭曲线 Γ_i 组合而成). 从而 $\gamma(\boldsymbol{F},\partial D)=\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma(\boldsymbol{F},\partial D_i)=0$.

注: 考虑若 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 退化, 则将引出微分拓扑中著名的 Poincaré—Hopf 定理, 它刻画了曲面的切矢量场和拓扑的内在关系, 可参见张筑生《微分拓扑新讲》定理 6.3. □

2. 解答: 记 $M=\max\limits_{x\in D}f(\boldsymbol{x}),m=\min\limits_{x\in D}f(\boldsymbol{x})$. 如果 $m=M$ 则 $f(\boldsymbol{x})$ 为常值函数, 结论不证自明. 现在假设 $M>m$, 并设 $\boldsymbol{P}$ 为最大值点, $\boldsymbol{Q}$ 为最小值点. 由于

$$\sum_{i=1}^{n}D_if(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$$

为全微分, 故对于任意的曲线 L, 曲线积分 $\int_L\sum\limits_{i=1}^{n}D_if(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i$ 积分与路径无关. 这样, 对于任何以 $\boldsymbol{P}$ 为起点, $\boldsymbol{Q}$ 为终点的曲线 L 有

$$\int_L\nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\int_L\sum_{i=1}^{n}D_if(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i=M-m$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为 L 在 $\boldsymbol{x}$ 处的单位切向量.

现在, 我们选取一条路径 $L:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$, 使得 L 的长度为 $2r$(两点最近距离至多为 $2r$, 若不足 $2r$ 则可多绕路), 且 $x_i'=\dfrac{D_if(\boldsymbol{x}(s))}{|\nabla f(\boldsymbol{x}(s))|}$, 则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 都在 D 内, 且

$$\int_L\nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\int_L|\nabla f(\boldsymbol{x})|\mathrm{d}s=M-m$$

由介值定理可知存在 $\boldsymbol{p}_0=(p_1^0,\cdots,p_n^0)\in\operatorname{int}D$ 使得

$$\max_{x\in D}f(\boldsymbol{x})-\min_{x\in D}f(\boldsymbol{x})=|\nabla f(\boldsymbol{p}_0)|\cdot 2r\in[\min_{x\in D}|\nabla f(\boldsymbol{x})|\cdot 2r,\max_{x\in D}|\nabla f(\boldsymbol{x})|\cdot 2r]$$

注: 如果设定 L 的长度 $a\geqslant 2r$, 则存在其它中值点 $\boldsymbol{p}_0$ 使得 $M-m=|\nabla f(\boldsymbol{p}_0)|\cdot a$. 但是 $a<2r$ 时不一定可行, 因为最值点为对径点时任何长为 a 的曲线无法连接这两点. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

3. 解答: 令 $f(\boldsymbol{v})=\sum\limits_{i=1}^{n}e^{(a_i,b_i)v}$, 令 $\boldsymbol{v}=(u,v)$, 得到梯度向量场

$$\nabla f(u,v)=\sum_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\,e^{a_iu+b_iv}$$

考察函数 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla f(\boldsymbol{v})>0$, 记 $\boldsymbol{v}_i=(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 由于多边形包含原点在其内部, 对任何非零向量 $\boldsymbol{v}$, 至少有一个 $\boldsymbol{v}_i$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角小于 $\pi/2$, 记

$$m_0=\cos\left(\max_{|\boldsymbol{v}|=1}\left\{\min_i\left\{\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_i\rangle\right\}\right\}\right)$$

有 $m_i\in(0,1)$, 再记 $m=\min_i\{|\boldsymbol{v}_i|\}$, $M=\max_i\{|\boldsymbol{v}_i|\}$, 则有

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla f(\boldsymbol{v})=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_ie^{v\cdot v_i}\geqslant m_0m|\boldsymbol{v}|e^{m_0m|\boldsymbol{v}|}-(n-1)M|\boldsymbol{v}|$$

可知当 $|\boldsymbol{v}|$ 足够大就有 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla f(\boldsymbol{v})>0$. 考虑 $D=\{\boldsymbol{v}:|\boldsymbol{v}|\leqslant r\}$, 则 r 足够大时在 ∂D 上总有

$$(u,v)\cdot\nabla f(u,v)>0$$

即 $\nabla f(u,v)$ 和 (u,v) 的夹角不超过 $\pi/2$. 现在令

$$G(u,v,\lambda)=\lambda\nabla f(u,v)+(1-\lambda)(u,v)$$

则对任何 $\lambda\in[0,1]$ 有 $G(u,v,\lambda)$ 在 ∂D 非退化, 故 ∇f 与 id 是 ∂D 上的同伦向量场, 故

$$\gamma(\nabla f,\partial D)=\gamma(\text{ id },\partial D)=1$$

因此 ∇f 在 D 上非退化, 即存在 $(u_0,v_0)\in D$ 使

$$\nabla f\,(u_0,v_0)=\sum_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\,e^{u_0a_i+v_0b_i}=0$$

取 $x=e^{u_0},y=e^{v_0}$ 即证命题.

注: 下面再给出一个极具分析色彩的证明:

依然令 $f(\boldsymbol{v})=\sum\limits_{i=1}^{n}e^{(a_i,b_i)v}$, 令 $\boldsymbol{v}=(u,v)$, 得到梯度向量场

$$\nabla f(u,v)=\sum_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\,e^{a_iu+b_iv}$$

即要寻找 $\nabla f(u,v)$ 的零点, 只需证明该向量场在包含原点半径 R 充分大的圆周上旋转都不为 0. 为此, 令 $\varphi(u,v)=\max\limits_k\{a_ku+b_kv\}$. 下证当 $(u,v)\neq(0,0)$ 时有 $\varphi(u,v)>0$.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

假设存在 $(s,t)\neq(0,0)$ 使得当 $k=1,2,\cdots,n$ 时有 $\varphi(s,t)\leqslant 0$, 则有 $sa_k+tb_k\leqslant 0$. 考虑 Oxy 平面上的集合 $B=\{(x,y)|sx+ty\leqslant 0\}$, 这是一个过原点直线 $sx+ty=0$ 为边界的半平面 (原点在直线上) 且 $(a_k,b_k)\in B(k=1,2,\cdots,n)$. 则以 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$ 为顶点的凸多边形不可能包含原点 O 在其内, 从而导致了矛盾. 因此当 $(u,v)\neq(0,0)$ 时有 $\varphi(u,v)>0$. 而 $k=1,2,\cdots,n$ 有限, 故 $\varphi(u,v)$ 为半平面上的连续函数. 考虑单位圆周 $E=\{(u,v)|u^2+v^2=1\}$, 由 $\varphi(u,v)$ 连续则它在 E 上必有最小值, 记为 M. 在半径 R 充分大的圆周 $\Gamma: u^2+v^2=R^2$ 上有

$$\varphi(u,v)=\max_k\{a_ku+b_kv\}\geqslant M\sqrt{u^2+v^2}$$

记 $\boldsymbol{r}=(u,v)$, 则 $\|\boldsymbol{r}\|=R$ 且有

$$a_ku+b_kv=(a_k,b_k)\cdot\boldsymbol{r},\quad \varphi(u,v)\geqslant M\|\boldsymbol{r}\|$$

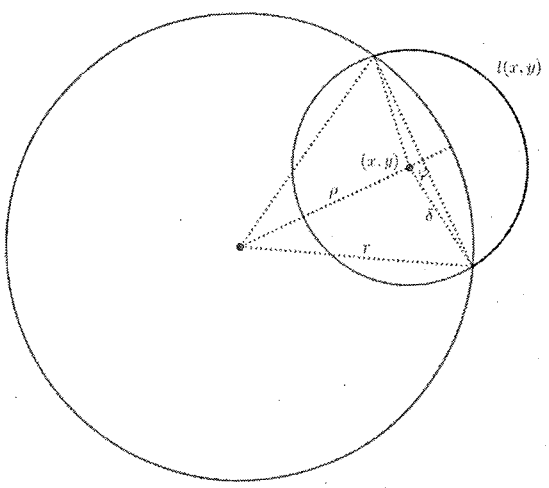
当 Γ 的半径 R 充分大时有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\cdot\nabla f(u,v)&=\sum_{k=1}^{n}e^{a_ku+b_kv}(a_k,b_k)\boldsymbol{r}\\&\geqslant M\|\boldsymbol{r}\|e^{M\|r\|}+(n-1)\inf_{x\in\mathbb{R}}xe^x\\&\geqslant M\|\boldsymbol{r}\|e^{M\|r\|}-\frac{n-1}{e}>0\end{aligned}$$

故 $\nabla f(u,v)$ 在圆周 $\|\boldsymbol{r}\|=R$ 上处处不为 0.

当 $\boldsymbol{r}=(u,v)$ 逆时针绕一圈遍历圆周 Γ 上所有点时 $\nabla f(u,v)$ 恰好旋转一周, 旋转度为 1, 则 $\nabla f(u,v)$ 在该圆盘内有零点 (u_0,v_0), 取 $x=e^{u_0},y=e^{v_0}$ 即完成了本题的证明. □

4. 解答: 如图所示



内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

利用余弦定理可以得出关系式

$$\rho^2+\delta^2-2\rho\delta\cos(\pi-\varphi)=r^2,\rho\in(r-\delta,r)$$

于是由极坐标变换后可得到

$$\iint\limits_D l(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{r-\delta}^{r}2\delta\varphi\rho\mathrm{d}\rho=4\pi\delta\int_{r-\delta}^{r}\rho\arccos\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\mathrm{d}\rho$$

由积分中值定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_D l(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=4\pi r\lim_{\delta\to0^+}\int_{r-\delta}^{r}\frac{1}{\delta}\arccos\frac{(r/\delta)^2-(\rho/\delta)^2-1}{2(\rho/\delta)}\mathrm{d}(\rho/\delta)\\&=4\pi r\lim_{\delta\to0^+}\int_{r-\delta}^{r}\arccos\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\\&=4\pi r\lim_{A\to+\infty}\int_{A-1}^{A}\arccos\frac{A^2-u^2-1}{2u}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

令 $t=\dfrac{A^2-u^2-1}{2u}$, 则 $u=\sqrt{A^2-t^2-1}-t$, $\mathrm{d}u=\left(\dfrac{t}{\sqrt{A^2-t^2-1}}-1\right)\mathrm{d}t$, 化为

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_D l(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&4\pi r\lim_{A\to+\infty}\int_1^0\arccos t\left(\frac{t}{\sqrt{A^2-t^2-1}}-1\right)\mathrm{d}t\\=&4\pi r\int_0^1\arccos t\mathrm{d}t=4\pi r\cdot1=4\pi r\end{aligned}$$

□

5. 解答:

(1) 构造微分形式

$$\omega=g_1\mathrm{d}g_2=g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

易验证 (用外微分的运算性质非常简便)

$$\mathrm{d}\omega=\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

所以由 Green 公式

$$\iint\limits_B\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\iint\limits_B\mathrm{d}\omega=\oint_{\partial B}g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

(2) 第二个等式是显然的. 设圆周 ∂B 的参数方程为 $x_1=x_1(t),x_2=x_2(t)$, 则有

$$g_2(x_1(t),x_2(t))=x_2(t)$$

从而

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1(t)+\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2(t)=\mathrm{d}x_2(t)$$

代入题设等式的第一项可知它与第三项相等, 从而结论得证.

(3) 假设存在这样的映射, 则将有

$$(g_1(\boldsymbol{x}))^2+(g_2(\boldsymbol{x}))^2=1$$

微分此式可得

$$\begin{cases} g_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}+g_2\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}=0 \\ g_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}+g_2\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}=0 \end{cases}$$

由 Cramer 法则知 $\dfrac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}=0$, 由 (1) 可见这意味着

$$\oint_{\partial B}\omega=0$$

但另一方面由 (2) 可知

$$\oint_{\partial B}\omega=\oint_{\partial B}g_1\mathrm{d}g_2=\oint_{\partial B}x_1\mathrm{d}x_2=\iint_B\mathrm{d}\left(x_1\mathrm{d}x_2\right)=\pi>0$$

导致矛盾, 从而命题得证.

(4) 设曲面定义在圆盘上, 并保持边界圆周不动, 则这样的曲面不能退缩到边界上, 除非撕破曲面. □

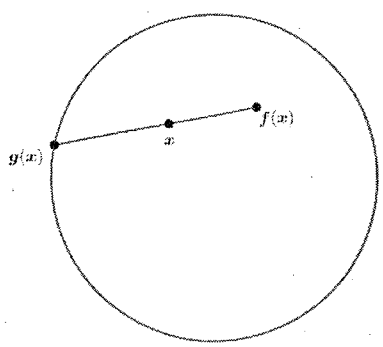
6. 解答:

(1) 取模平方后可得

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|^2=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+t(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\|^2=1$$

将上式展开即得结论.

(2) 由 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 的定义, 当 $\boldsymbol{x}\in C$ 时显然 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{x}$ 是同一点且 $\boldsymbol{g}(B)\subset C$. 直观图如下



内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(3) 由于

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^2>0,\quad \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^2-1\leqslant 0$$

所以从 (1) 中可知 $t(\boldsymbol{x})$ 满足的二次方程有两个实根, 并且其中至多只有一个根是正的. 考察方程左边的式子, 可见当 $t(\boldsymbol{x})=1$ 时此式化为

$$\|\boldsymbol{x}\|^2-1\leqslant 0$$

而当 $t(\boldsymbol{x})$ 充分大时该式显然大于 0. 由此可知对任意给定的 $\boldsymbol{x}\in B$, 关于 $t(\boldsymbol{x})$ 的二次方程有唯一正根 $t(\boldsymbol{x})\geqslant 1$.(几何上来看就是从点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 出发经过点 $\boldsymbol{x}$ 所引的射线与 C 恰有一个交点) 利用二次方程根的表示式容易看出 $t(\boldsymbol{x})$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 至少是二阶连续可微的. 因而 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 也至少是二阶连续可微的. 从而 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 满足第 5 题第 (3) 问的条件, 所以 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 其实是不存在的, 导致了矛盾, 从而命题成立.

注: Brouwer 不动点定理有许多实际运用, 例如: 将一碗粥中的米看作是均匀分布且大小形状皆相同的, 用筷子搅动这碗粥后, Brouwer 不动点定理告诉我们至少有一粒米在搅动后仍然处于原先的位置. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第二十五章 曲面积分

§25.1.3 练习题 学员: d39

1. 解答:

(1) $\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{R^2}{2}} \sqrt{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R/\sqrt{2}}\sqrt{2}r^3\mathrm{d}r = \dfrac{\sqrt{2}R^4}{8}\pi$

(2) 由于

$$E = \cos^2\varphi\sin^2\alpha + \sin^2\varphi\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$G = r^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha + r^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha = r^2\sin^2\alpha$$
$$F = (\cos\varphi\sin\alpha)(-r\sin\varphi\sin\alpha) + \sin\varphi\sin\alpha(r\cos\varphi\sin\alpha) = 0$$

计算出

$$\sqrt{EG-F^2} = r\sin\alpha$$

则有

$$\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cos^2\alpha\cdot r\sin\alpha\mathrm{d}r = \frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha$$

□

注: 事实上 (1) 是 (2) 的特例 (取 $a=R,\alpha=\pi/4$).

2. 解答: 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

故有

$$\begin{aligned}\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S &= \int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x+y+\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}y\\ &= \int_{-1}^1(\pi x+2\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x = 4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi\end{aligned}$$

□

3. 解答: 根据对称性可知

$$\iint\limits_S (2xy+2yz+2zx)\mathrm{d}S = 0$$

故

$$\iint\limits_S (x+y+z)^2\mathrm{d}S = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S = \iint\limits_S \mathrm{d}S = 4\pi$$

注: 也可利用 Possion 公式 (例题 25.5.1), 参见周民强第三册 P332 例 7.4.4 第 (3) 问. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

4. 解答: $\iint\limits_S \left(x^4-y^4+y^2z^2-z^2x^2+1\right)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x}\mathrm{d}S=2\sqrt{2}\pi.$ □

5. 解答:

(1) 由对称性, 只需考虑第一卦限的部分 S_1, 投影区域为 $D=\{(x,y)|x+y\leqslant 1,x,y\geqslant 0\}$.

$$\iint\limits_{S_1}|xyz|\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint\limits_D xy(1-x-y)\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y(1-x-y)\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{120}$$

故

$$\iint\limits_S|xyz|\mathrm{d}S=8\iint\limits_{S_1}|xyz|\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{3}}{15}$$

(2) 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}$$

故有

$$\iint\limits_S|xyz|\mathrm{d}S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1+4r^2}r\mathrm{d}r=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{r^2=t}\int_0^1 t^2\sqrt{1+4t}\mathrm{d}t\xlongequal{y=\sqrt{1+4t}}\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{32}\left(y^2-1\right)^2y^2\mathrm{d}y=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$ □

6. 解答: 由对称性可知

$$\begin{aligned}\iint\limits_S\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S&=8\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\sqrt{3}\left[x^2+y^2+(a-x-y)^2\right]\mathrm{d}y\\&=16\sqrt{3}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\left[x^2+y^2+xy+\frac{a^2}{2}-a(x+y)\right]\mathrm{d}y\\&=16\sqrt{3}\int_0^a\left[x^2(a-x)-\frac{1}{6}(a-x)^3-ax(a-x)+\frac{a^2}{2}(a-x)\right]\mathrm{d}x\\&=16\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)a^4=2\sqrt{3}a^4\end{aligned}$$ □

7. 解答: 由球面方程 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 知

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{|t|}{\sqrt{t^2-\left(x^2+y^2\right)}}$$

而由

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=t^2\\z^2=x^2+y^2\end{cases}$$

可得

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

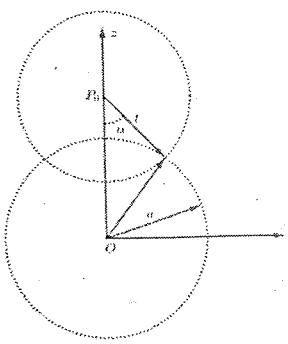
$$x^2+y^2=\frac{t^2}{2}=\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$$

于是

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\left(t/\sqrt{2}\right)^2}\left(x^2+y^2\right)\frac{|t|}{\sqrt{t^2-\left(x^2+y^2\right)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=|t|\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=|t|\int_0^{2\pi}\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3\mathrm{d}\varphi=\frac{(8-5\sqrt{2})\pi}{6}t^4 \qquad \square$$

8. 解答: 记 $x^2+y^2+z^2=r^2$. 旋转坐标轴, 使点 $P(x,y,z)$ 位于 Oz 轴的正方向上的点 $P_0(0,0,r)$, 如右图所示. 显然, 当 $0<t\leqslant r-a$ 及 $t\geqslant r+a$ 时, 整个球面上的点满足 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant 0$, 此时 $f(\xi,\eta,\zeta)=0$. 从而, 积分



$$f(x,y,z,t)=\iint\limits_S f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S=0$$

当 $r-a<t<r+a$ 时, 则

$$F(x,y,z,t)=\iint\limits_{S'}\mathrm{d}S'$$

其中 S' 为 S 位于 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2$ 内的部分. 从而我们有

$$F(x,y,z,t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a t^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\pi t^2(1-\cos\alpha)$$

$$=2\pi t^2\left(1-\frac{t^2+r^2-a^2}{2rt}\right)=\frac{\pi t}{r}\left[a^2-(r-t)^2\right] \qquad \square$$

9. 解答: 曲面由四部分组成, 分别为

$$S_1: x+y+z=1, x>0, y>0, z>0 \quad S_2: x=0 \quad S_3: y=0 \quad S_4: z=0$$

于是我们有

$$\iint\limits_S\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}z}{(1+y)^2}$$

$$+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x^2)}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)+2(1-\ln 2)=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2 \qquad \square$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

10. 解答: $\iint\limits_S \frac{|x|}{z}\mathrm{d}S = \int_0^{2a}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{z^2}{2a}}\frac{|x|}{z}\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\mathrm{d}y = \int_0^{2a}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{z^2}{2a}}\frac{|x|}{z}\sqrt{1+\left(\frac{2a-2y}{2x}\right)^2}\mathrm{d}y$

$= \int_0^{2a}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{z^2}{2a}}\frac{1}{z}\sqrt{x^2+(y-a)^2}\mathrm{d}y = \int_0^{2a}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{z^2}{2a}}\frac{a}{z}\mathrm{d}y = a^2.$ □

11. 解答: $\iint\limits_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{2}r^3\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$ □

§25.2.3　练习题　学员: d39

1. 解答: 注意到当曲面由 $z=z(x,y)$ 表示时有 $\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 而

$$\cos\alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\quad \cos\beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\quad \cos\gamma = 1$$

由两类曲面积分之间的关系可知

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\pm\iint\limits_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\,\mathrm{d}S\\
=&\pm\iint\limits_D [P(x,y,z)(-z_x) + Q(x,y,z)(-z_y) + R(x,y,z)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\pm\iint\limits_D (-Pz_x - Qz_y + R)\Big|_{z=z(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

注: 这个公式的优势在于避免了同一曲面要向三个坐标平面分别作投影, 简化了第二型曲面积分的计算. □

2. 解答: 记 Σ_2 是 Σ 在 xOy 平面以下的部分, 若记 $\Sigma_1: z_1 = z_1(x,y)$ 和 $\Sigma_2: z_2 = z_2(x,y)$, 则有

$$z_1(x,y) = -z_2(x,y) \Rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{\partial z_2}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y} = -\frac{\partial z_2}{\partial y}$$

而 Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 平面上的投影区域相同, 所以有

$$\begin{aligned}
-\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S &= \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,-z)\mathrm{d}S\\
&= \iint\limits_{D_{xy}} f\left(x,y,-z_2(x,y)\right)\sqrt{1+z_{2x}^2+z_{2y}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iint\limits_{D_{xy}} f\left(x,y,z_1(x,y)\right)\sqrt{1+z_{2x}^2+z_{2y}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

从而

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$$

注: 第一型曲面积分对称性的规律为偶倍奇零. □

3. 解答: 延续上一题的符号, 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma_2} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=-\iint\limits_{\Sigma_2} R(x,y,-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,-z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

根据本题条件再补充一例:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma_2} P\left(x,y,z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=-\iint\limits_{\Sigma_2} P\left(x,y,-z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iint\limits_{\Sigma_2} P(x,y,-z)\left(-\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{\Sigma_2} P(x,y,-z)\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint\limits_{\Sigma_2} P(x,y,z)\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\Sigma_1} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

所以可以得到

$$\iint\limits_{\Sigma} P\left(x,y,z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_1} P\left(x,y,z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_2} P\left(x,y,z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

注: 本题展示了第二型曲面积分对称性的原理, 但与第一型曲面积分不同, 需要考虑方向, 规律较为复杂, 记忆容易混淆, 在第 6 题中我们结合例子给出具体的记忆方法. □

4. 解答: 考虑两类曲面积分之间的联系可知

$$D_{xy}=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S}\cos(\boldsymbol{n},z)\mathrm{d}S=\mu\iint\limits_{S}\mathrm{d}S=\mu S$$

在例题 21.4.2 中, 椭圆 l 在 xOy 平面的投影为

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{(2x+y)^2}{2}=1$$

即

$$14x^2+12xy+9y^2-6=0$$

我们采用正交变换来化简这个椭圆, 从而求出它的面积 (正交变换不改变形状). 具体步骤如下:

$$I_1=14+9=23,\quad I_2=\begin{vmatrix}14 & 6\\ 6 & 9\end{vmatrix}=90$$

曲线的特征方程为

$$\lambda^2-23\lambda-90=0$$

解得 $\lambda_1=5,\lambda=18$, 对应的单位特征向量为 $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^{\mathrm{T}},\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^{\mathrm{T}}$. 令

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

则原方程化为

$$5x'^2+18y'^2=6$$

故投影后椭圆的面积为 $S'=\frac{\sqrt{10}}{5}\pi$. 又法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,1)$, $\cos(\boldsymbol{n},z)=\frac{1}{\sqrt{6}}$, 故原椭圆 l 的面积为

$$S=\frac{S'}{\mu}=\frac{\sqrt{10}}{5}\pi\cdot\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{15}}{5}\pi$$

注: 利用正交变换化简二次曲线的详细方法可参见吕林根第五章第 6 节. □

5. 解答: 根据第 3 题, 由对称性可知

$$\begin{aligned}I_1&=2\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}a^3\end{aligned}$$

而由对称性可知 $I_2=0$. □

6. 解答: 先引入对称性的记忆技巧: 对于第二型曲面积分 $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}a\mathrm{d}b$

如果曲面 S 对于平面 Σ 对称, 记对称点为 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 对应的外法向量和 c 轴的夹角 α 和 β.(这里 a 和 b 为 $\{x,y,z\}$ 中的两元, c 为剩余的元) 令

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$p_\Sigma=\begin{cases}1, f(\boldsymbol{P})=f(\boldsymbol{Q})\\-1, f(\boldsymbol{P})=-f(\boldsymbol{Q})\end{cases},\quad q_{ab}=\begin{cases}1, \alpha=\beta\in(0,\pi/2)\\-1, \alpha=\pi-\beta\neq\pi/2\\0, \alpha=\beta=\pi/2\end{cases}$$

记相互对称的其中一面为 S', 则有

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}a\mathrm{d}b=\begin{cases}2\iint\limits_{S'} f(x,y,z)\mathrm{d}a\mathrm{d}b, & p_\Sigma q_{ab}=1\\0, & p_\Sigma q_{ab}\in\{0,-1\}\end{cases}$$

以本题为例:

(i) 对于第一项:

这里曲面 S 关于 xOy 平面对称, $f(\boldsymbol{P})=-f(\boldsymbol{Q})$ 故 $p_{xy}=-1$, 又 $\alpha=\beta\in(0,\pi/2)$ 故 $q_{yz}=1$, 从而 $p_{xy}\cdot q_{yz}=-1$, $\iint\limits_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

(ii) 对于第二项:

这里曲面 S 关于 zOx 平面对称, $f(\boldsymbol{P})=-f(\boldsymbol{Q})$ 故 $p_{zx}=-1$, 又 $\alpha=\pi-\beta\neq\pi/2$, 故 $q_{zx}=-1$, 从而 $p_{zx}\cdot q_{zx}=1$,

$$\iint\limits_S yx\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint\limits_{S\cap\{y\geqslant 0\}} yx\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$S\cap\{y\geqslant 0\}$ 在 zOx 平面上的投影为矩形区域 $\{(x,z)|0\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant z\leqslant 1\}$, 故

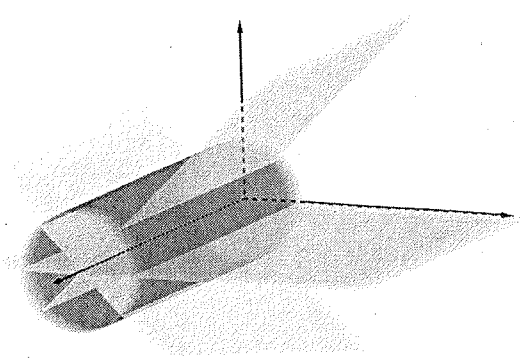
$$2\iint\limits_{S\cap\{y\geqslant 0\}} yx\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\int_1^{1}\mathrm{d}z\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$$

(iii) 对于第三项:

根据几何意义可知 S 上任一点处的外法向量都与 z 轴垂直, 故 $\alpha=\beta=\pi/2$, 积分为零.

综上可知所求第二型曲面积分的值为 4/3. □

7. 解答: 如图所示



内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

曲面的参数方程为

$$x = r, y = \cos\theta, z = \sin\theta$$

区域为 $D = \{(r,\theta)|\theta \in [\pi/4, 3\pi/4], r \in [0,1]\}$

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = 0, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)} = -\cos\theta, \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = -\sin\theta$$

利用 (25.3) 可知

$$\begin{aligned}\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D [QB + RC]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \iint\limits_D [-\cos^2\theta(r^2 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta(\cos^2\theta - r^2)]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} -r^2\cos 2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\end{aligned}$$ □

§25.3.2 练习题　学员: d39

1. 解答:

(1) $\iint\limits_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(y^2 + xz\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint\limits_{[0,a]^3} (y+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -a^4;$

(2)

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S (x^3+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^2 - xz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iiint\limits_{x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1} (3x^2 + 2y + 3z^2 + 2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 [3\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + 2\rho\sin\varphi\sin\theta + 3(\rho\cos\varphi+1)^2 + 2]\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{124}{15}\pi\end{aligned}$$

(3) 计算得

$$\begin{aligned}P &= \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 0 \\ Q &= \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 3z^2 - z \\ R &= \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = y^2 - x^2\end{aligned}$$

故由 Gauss 公式

$$I = \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$ □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

2. 解答:

(1) 补充平面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)|z=h,x^2+y^2\leqslant h^2\}$, 方向取上侧. 由 $\Sigma+\Sigma_1$ 的对称性可知

$$\iiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

于是由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\=&2\iiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h r\mathrm{d}r\int_r^h z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}h^4\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=&\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\=&\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}h^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}h^4\end{aligned}$$

(2) 补充平面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)|z=0,x^2+y^2\leqslant a^2\}$, 方向取下侧. 则由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}I=&\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}\\=&\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\\z\geqslant 0}}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^3+y^3+z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&3\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi+0=\frac{6}{5}a^5\pi\end{aligned}$$

(3) 补充平面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)|x=0,y^2/b^2+z^2/c^2\leqslant 1\}$, 方向取前侧. 则由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}I=&\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=I_1-I_2\\=&\iiint\limits_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\\x\geqslant 0}}\left(\frac{3x^2}{a^3}+\frac{3y^2}{b^3}+\frac{3z^2}{c^3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1}y^3z^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1=&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 3r^2\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b}+\frac{\cos^2\varphi}{c}\right)abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\=&\frac{3}{5}abc\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{b}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{c}\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi\right)=\frac{2}{5}(ab+bc+ca)\pi\end{aligned}$$

$$I_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos^3\theta\cdot r^3\sin^3\theta\cdot bcr\mathrm{d}r=0$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

故 $I=\dfrac{2}{5}(ab+bc+ca)\pi$. □

3. 解答: 易见 $F(x,y,z)$ 是 x,y,z 的二次齐次函数, 根据命题 19.3.1 可知

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=2F(x,y,z) \tag{1}$$

记 S 是锥体 V 的底部, 则由 Gauss 公式可知

$$\iint\limits_{S+\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{S+\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{V}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3V$$

另一方面

$$\cos\alpha=\frac{F_x}{\pm\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\cos\beta=\frac{F_y}{\pm\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\cos\gamma=\frac{F_z}{\pm\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$$

由 (1) 式可知在 Σ 上

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\frac{xF_x+yF_y+zF_z}{\pm\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}=\frac{2F(x,y,z)}{\pm\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}=0$$

故

$$\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=0$$

又在 Π 上 (x,y,z) 是向径, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)^{\mathrm{T}}$ 是 Π 的单位外法向量, 故

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=(x,y,z)(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)^{\mathrm{T}}=H$$

$$\iint\limits_{S}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=H\iint\limits_{S}\mathrm{d}S=HS$$

综上可知

$$V=\iint\limits_{S+\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}SH$$

注: 其他证明方法参见吉米多维奇第 6 册第 4383 题. □

4. 解答: 由球坐标变换

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

代入方程得

$$r^4=a^2r^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

解出

$$r = a\sqrt{\sin\theta\cos\theta}\sin\varphi$$

所以

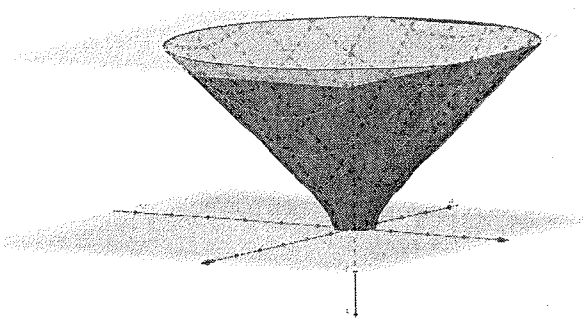
$$\begin{aligned} V = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =& 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin\theta\cos\theta}\sin\varphi} r^2\sin\varphi\mathrm{d}r \\ =& \frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\sqrt{\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^{\frac{1}{2}}\varphi\mathrm{d}\varphi \\ =& \frac{2}{3}a^3\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) \\ =& \frac{1}{3}a^3\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{96}a^3\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

注: 本题若逆用 Gauss 公式利用公式 (25.3) 计算曲面积分计算量会非常大. □

5. 解答: 如图所示, 补充平面

$$S_1 = \{(x,y,z)|z=0, x^2+y^2\leqslant 1\}\text{(方向取下侧)}$$
$$S_2 = \left\{(x,y,z)|z=\sqrt{3}, x^2+y^2\leqslant 4\right\}\text{(方向取上侧)}$$

形成封闭立体记为 Ω.



则

$$I = \iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma+S_1+S_2} - \iint_{S_1} - \iint_{S_2} = I_1 - I_2 - I_3$$

由 Gauss 公式

$$\begin{aligned} I_1 =& \iiint_{\Omega}(3x^2+2x^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z^2+1} 4x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ =& \int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z^2+1}} 4r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r = \frac{24\sqrt{3}}{5}\pi \end{aligned}$$

由于 S_1 上的外法向量和 x 轴, y 轴始终成直角, 故 $I_2 = 0$.

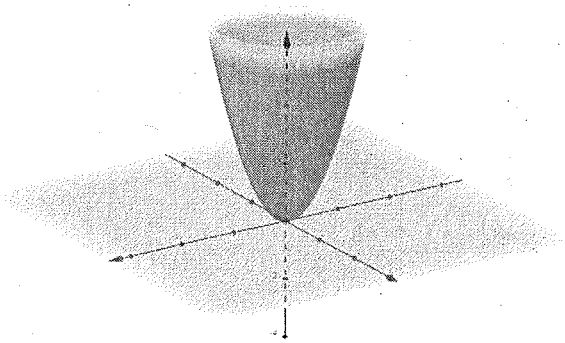
内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

同理, I_3 的前两项也为 0, 且外法向量和 z 轴正方向一致, 故

$$I_3 = \iint\limits_{S_2} -x^2 z \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} -\sqrt{3}x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -4\sqrt{3}\pi \ .$$

综上可知 $I = \dfrac{44\sqrt{3}}{5}\pi$. □

6. 解答: 积分区域如图



由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V (z+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
=&\int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z} (z+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{z}} (z+r^2) r\mathrm{d}r \\
=&\int_0^1 \frac{3}{2}\pi z^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$ □

7. 解答: 由 Gauss 公式

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cos y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} (-\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

根据对称性可知积分值为 0. □

§25.3.4　练习题　学员: d39

1. 解答: 记

$$P = z\cos\beta - y\cos\gamma, \quad Q = x\cos\gamma - z\cos\alpha, \quad R = y\cos\alpha - x\cos\beta$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

则由 Stokes 公式有

$$\oint_C \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_S \left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)\mathrm{d}S = 2\iint_S \mathrm{d}S = 2S \qquad \square$$

2. 解答: 记 D 为 C 的内部, 方向取上侧, 由 Stokes 公式有 (根据右手法则判断正负)

$$\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z = -\iint_D \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}$$

$$= 2\iint_D \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\left[\iint_{D_{yz}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{D_{zx}} \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

考虑三个投影面

$$D_{yz} : (1-y-z)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 + z^2 + 2yz - 2y - 2z = 0$$
$$D_{zx} : x^2 + (1-x-z)^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 + z^2 + 2xz - 2x - 2z = 0$$
$$D_{xy} : x^2 + y^2 = 1$$

对于椭圆 D_{yz}, 令 $z' = z+1$ 移轴可得新椭圆方程

$$2x^2 + 2xz + z^2 = 1$$

利用长 (短) 半轴端点与原点的距离为最大 (小) 值这一性质, 可令 (Lagrange 乘子法)

$$\begin{cases} L = x^2 + z^2 + \lambda(2x^2 + 2xz + z^2 - 1) \\ L_x = 2x + 4\lambda x + 2\lambda z = 0 \\ L_z = 2z + 2\lambda x + 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + 2xz + z^2 = 1 \end{cases}$$

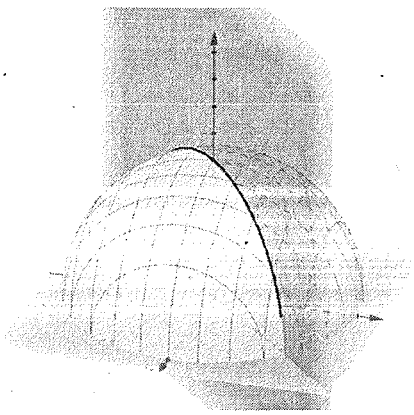
先解得 $\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$, 最后可以解得 $x^2 + z^2$ 的最小值为 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, 最大值为 $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

从而椭圆面积为 $D_{yz} = D_{zx} = \pi$. 又 $D_{xy} = \pi$, 故原积分值为 6π.

注: 事实上线性代数中有结论: 形如 $ax^2 + 2bxy + cz^2 = 1$ 的椭圆半轴长是矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 特征值倒数的开方. $\square$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

3. 解答:



如图所示, 连接 AB 记为 Γ, 方向为 B 到 A. 由 Stokes 公式

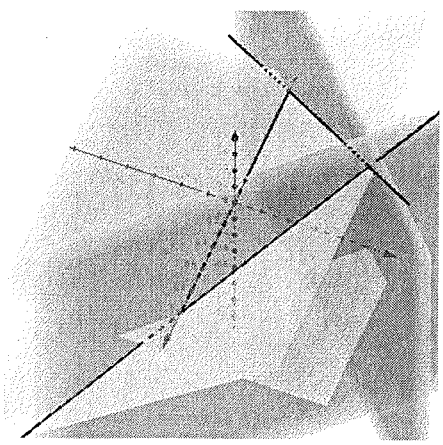
$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_{C+\Gamma} (z^3+3x^2y)\mathrm{d}x + (x^3+3y^2z)\mathrm{d}y + (y^3+3z^2x)\mathrm{d}z \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^3+3x^2y & x^3+3y^2z & y^3+3z^2x \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Γ 的参数方程为 $x=t, y=t, z=0, t\in[-a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}]$, 故

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Gamma (z^3+3x^2y)\mathrm{d}x + (x^3+3y^2z)\mathrm{d}y + (y^3+3z^2x)\mathrm{d}z \\ &= \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} (3t^3+t^3+t^3)\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

因此 $I = I_1 - I_2 = 0$. □

4. 解答:



如图所示, 连接 $(a,0,0)$ 到 $(-a,0,0)$ 的直线段, 记为 Γ. 由 Stokes 公式

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$I_1=\oint_{C+\Gamma}\mathrm{e}^{x+z}\left\{\left[(x+1)y^2+1\right]\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y+xy^2\mathrm{d}z\right\}$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ e^{x+z}[(x+1)y^2+1] & 2xye^{x+z} & xy^2e^{x+z}\end{vmatrix}$$

$$=\iint_S e^{x+z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{d}z\int_{z-1}^{1-z}e^{x+z}\mathrm{d}x=ea+\frac{1}{2e}-\frac{e^{2a-1}}{2}$$

$$I_2=\int_\Gamma e^x\mathrm{d}x=\int_a^{-a}e^t\mathrm{d}t=e^{-a}-e^a$$

故 $I=I_1-I_2=ea+\dfrac{1}{2e}-\dfrac{e^{2a}-1}{2}-e^{-a}+e^a$. □

5. 解答: 由 f,g,h 连续知存在原函数 F,G,H, 于是

$$\oint_C[f(x)-yz]\mathrm{d}x+[g(y)-xz]\mathrm{d}y+[h(z)-xy]\mathrm{d}z=\oint_C\mathrm{d}(F+G+H-xyz)$$

由于 C 是封闭曲线, 积分的起点和终点为同一点, 故上式为 0.

注: 本题缺乏 f,g,h 可导的条件, 不可以直接使用 Stokes 公式.(若要强行使用, 需要把 f,g,h 分离出去计算, 剩余部分再使用 Stokes 公式) □

6. 解答: 逆用 Stokes 公式可知

$$\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-z & x^3-yz & -3xy^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\oint_{\substack{x^2+y^2=R^2\\ z=0}}x\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^{2\pi}(-R^2\cos\theta\sin\theta+R^4\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{3}{4}R^4\pi$$

(由右手法则知从 xOy 平面看曲线是顺时针) □

7. 解答: 平面 $x+y+z=0$ 的法线的方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 于是由 Stokes 公式可知

$$\oint_c y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-\pi a^2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=-\sqrt{3}\pi a^2$$

注: 也可转化曲线积分为定积分直接计算, 参见吉米多维奇第 6 册第 4367 题. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§25.3.6　练习题　学员: d39

1. 解答:

(1) 容易验证

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-2z$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=-2x$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=-2y$$

因此是全微分. 取 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$, 原函数为

$$\varphi(x,y,z)=\int_0^x(x^2-2yz)\mathrm{d}x+\int_0^y y^2\mathrm{d}y+\int_0^z z^2\mathrm{d}z+C=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-2xyz+C$$

(2) 容易验证

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4xy}{(x^2-y^2)^3}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=0$$

因此是全微分. 取 $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,0)$. 原函数为

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)&=\int_1^x\left[\frac{x}{(x^2-y^2)^2}-\frac{1}{x}+2x^2\right]\mathrm{d}x+\int_2^y\left[\frac{1}{y}-\frac{y}{(1-y^2)^2}+3y^3\right]\mathrm{d}y+\int_0^z 5z^3\mathrm{d}z+C\\&=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{1-y^2}\right]-(\ln x-\ln 1)+\frac{2}{3}(x^3-1)+(\ln y-\ln 2)\\&\quad-\left[\frac{1}{2-2y^2}+\frac{1}{6}\right]+\frac{3}{4}(y^4-16)+\frac{5}{4}z^4+C\\&=-\frac{1}{2(x^2-y^2)}-\ln\frac{x}{y}+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}y^4+\frac{5}{4}z^4+C\end{aligned}$$

□

2. 解答: 容易看出原函数是 $\varphi(x,y,z)=xyz$, 故

$$\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}=0$$

□

3. 解答: 容易看出

$$r^3(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=\mathrm{d}\frac{r^5}{5}$$

起点位置始终满足 $r=a$, 终点位置始终满足 $r=b$, 从而

$$\int_C r^3(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=\int_C\mathrm{d}\frac{r^5}{5}=\frac{1}{5}\left(b^5-a^5\right)$$

□

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§25.5.3 参考题 学员: d39

1. 解答:

显然, 平面 $x+y+z=\pm\sqrt{3}$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的两个切平面, 于是

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & |t|\leqslant\sqrt{3}\\ 0, & |t|>\sqrt{3}\end{cases}$$

由方程组 $\begin{cases}x+y+z=t\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 得椭圆方程

$$x^2+y^2+[t-(x+y)]^2=1$$

或

$$x^2+y^2+xy-t(x+y)=\frac{1-t^2}{2}$$

记该椭圆围成的区域为 Ω, 则

$$\begin{aligned}F(t)&=\iint\limits_{\Omega}\left\{1-x^2-y^2-[t-(x+y)]^2\sqrt{3}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega}\left[1-t^2-2(x^2+y^2)-2xy+2t(x+y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

令

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{t}{3}\\ \frac{t}{3}\end{pmatrix}$$

则方程化为标准椭圆方程

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2}=1$$

记相应得区域为 Ω', 则

$$F(t)=\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega'}\left[1-\frac{t^2}{3}-\left(3x''^2+y''^2\right)\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

作广义极坐标变换

$$x'=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}r\cos\varphi,\quad y'=\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}r\sin\varphi$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

则当 $|t| \leqslant \sqrt{3}$ 时有

$$F(t)=\left(1-\frac{t^2}{3}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1-\frac{t^2}{3}\right)(r-r^3)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{18}\left(3-t^2\right)^2$$

而当 $|t|>\sqrt{3}$ 时有 $F(t)=0$.

注: 吉米多维奇第六册第 4359 题还讨论了 $F(t)$ 的图像. □

2. 解答: 记 Σ 是单位球面. 令

$$x=\sin\theta\cos\varphi, y=\sin\theta\sin\varphi, z=\cos\theta$$

则 $\mathrm{d}S=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, 从而所求积分可转化为第一型曲面积分

$$I=\iint_\Sigma e^{x-y}\mathrm{d}S$$

设平面 $P_t:\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}=t,-1\leqslant t\leqslant 1$, 其中 t 为平面 P_t 被球面截下部分中心到原点的距离. 用平面 P_t 分割球面 Σ, 球面在平面 $P_t, P_{t+\mathrm{d}t}$ 之间的部分形如圆台外表面状, 记为 $\Sigma_{t+\mathrm{d}t}$. 被积函数在其上为 $e^{x-y}=e^{\sqrt{2}t}$.

由于 $\Sigma_{t+\mathrm{d}t}$ 半径为 $r_t=\sqrt{1-t^2}$, 半径的增长率为

$$\mathrm{d}\sqrt{1-t^2}=\frac{-t\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

就是 $\Sigma_{t+\mathrm{d}t}$ 上下底半径之差. 记圆台外表面斜高为 h_t, 则由微元法知

$$\mathrm{d}t^2+(\mathrm{d}\sqrt{1-t^2})^2=h_t^2$$

得到 $h_t=\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, 所以 $\Sigma_{t+\mathrm{d}t}$ 的面积为

$$\mathrm{d}S=2\pi r_t h_t=2\pi\mathrm{d}t$$

于是

$$I=\int_{-1}^1 e^{\sqrt{2}t}2\pi\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}\Big|_{-1}^1=\sqrt{2}\pi\left(e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}\right)$$ □

3. 解答: 充分必要条件: f 是 -3 次齐次函数, 即满足

$$F(x,y,z)=3f+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

必要性: 记 V 是闭曲面 S 的内部, 则由 Gauss 公式可得

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\iint\limits_S xf(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yf(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + zf(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

充分性: 假设存在 $\boldsymbol{P}\in\Omega$ 使得 $F(x,y,z)\neq 0$, 不妨设 $F(\boldsymbol{P})>0$, 则存在充分小的开球 $O_\delta(\boldsymbol{P})$, 在其上 $F(x,y,z)$ 恒正, 从而

$$\iint\limits_{\partial O_\delta(P)} xf(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yf(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + zf(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{O_\delta(P)} F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z > 0$$

与题设矛盾. 故 $F(x,y,z)\equiv 0$, 得证. □

4. 解答: 先考虑如果 (x_0,y_0,z_0) 不在曲面 Σ 上, 则有

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = \cos(x,\boldsymbol{r})\cos\alpha + \cos(y,\boldsymbol{r})\cos\beta + \cos(z,\boldsymbol{r})\cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦. 易见

$$\cos(x,\boldsymbol{r}) = \frac{x-x_0}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos(y,\boldsymbol{r}) = \frac{y-y_0}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos(z,\boldsymbol{r}) = \frac{z-z_0}{|\boldsymbol{r}|}$$

由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}\iint\limits_\Sigma \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}S &= \iint\limits_\Sigma \left(\frac{x-x_0}{|\boldsymbol{r}|}\cos\alpha + \frac{y-y_0}{|\boldsymbol{r}|}\cos\beta + \frac{z-z_0}{|\boldsymbol{r}|}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\ &= \iiint\limits_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{|\boldsymbol{r}|}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y_0}{|\boldsymbol{r}|}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z_0}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{r}|}\end{aligned}$$

如果 (x_0,y_0,z_0) 在曲面 Σ 上, 作充分小的开球 $O_\varepsilon(x_0,y_0,z_0)$, 则

$$\iint\limits_\Sigma \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma-\partial O_\varepsilon(x_0,y_0,z_0)} \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}S + \iint\limits_{\partial O_\varepsilon(x_0,y_0,z_0)} \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}S$$

第一项由之前讨论的结论可知其值为 $2\iiint\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{r}|}$, 而对于第二项, 我们注意到在开球 $O_\varepsilon(x_0,y_0,z_0)$ 的边界上 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 方向始终相反, 即 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=-1$, 于是

$$\iint\limits_{\partial O_\varepsilon(x_0,y_0,z_0)} \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}S = -4\pi\varepsilon^2$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 便得到了结论. □

5. 解答: 平面 Π 的法向量是 (A,B,C), 也是 Γ 的法向量. 不妨设 A,B,C 都非负, 则

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

记 Γ 围成区域为 D, 则由 Stokes 知

$$\oint_\Gamma \omega = \iint_D \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

我们希望积分内的行列式为 1, 即

$$\cos\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\cos\beta\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\cos\gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=1$$

显然 A,B,C 不能同时为 0, 不妨设 $A\neq 0$, 令 $R=\dfrac{y}{\cos\alpha}, P=0, Q=0$, 满足上式, 从而

$$\oint_\Gamma \omega = \iint_D \mathrm{d}S = S(\Gamma)$$

(求出一组解即可) □

6. 解答: 记

$$A=\frac{\xi-x}{r^3}, B=\frac{\eta-y}{r^3}, C=\frac{\zeta-z}{r^3}$$

易验证

$$A_\xi+B_\eta+C_\zeta=0,\quad A_x+B_y+C_z=0$$

且

$$C_x=-C_\xi,\quad C_y=-C_\eta,\quad C_z=-C_\zeta$$

于是

$$\begin{aligned} P_y &= \oint_\Gamma C_y\mathrm{d}\eta - B_y\mathrm{d}\zeta = \oint_\Gamma (C_y\mathrm{d}\eta + C_z\mathrm{d}\zeta) + A_x\mathrm{d}\zeta \\ &= \oint_\Gamma -(C_\eta\mathrm{d}\eta + C_\zeta\mathrm{d}\zeta) + A_x\mathrm{d}\zeta = \oint_\Gamma C_\xi\mathrm{d}\xi + A_x\mathrm{d}\zeta = \oint_\Gamma -C_x\mathrm{d}\xi + A_x\mathrm{d}\zeta = Q_x \end{aligned}$$

其余等式类似可验证 (或直接由轮换对称性可知). □

7. 解答: 由 Stokes 公式可知

$$P(x,y,z)=\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi & \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi & \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ \dfrac{\partial}{\partial\xi} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\zeta} \\ 0 & C & -B \end{vmatrix} = \iint_S (-B_\eta - C_\zeta)\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + B_\xi\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi + C_\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$= \iint_S A_\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + B_\xi\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi + C_\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = -\frac{\partial}{\partial x}\iint_S A\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta + B\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi + C\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

同理可求出

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$Q(x,y,z)=-\frac{\partial}{\partial y}\iint\limits_S A\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+B\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi+C\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_S A\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+B\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi+C\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

于是 $u(x,y,z)=-\iint\limits_S A\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+B\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi+C\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$ □

8. 解答: 设液体表面为 xy 平面, z 轴方向向下, 液体比重为 ρ, 物体表面面积元 $\mathrm{d}S$ 的深度为 z, 则这一元素所受液体压力为 $\rho z\mathrm{d}S$, 它在 z 轴方向的分力为 $-\rho z\cos(\boldsymbol{n},z)\mathrm{d}S$, 于是由 Gauss 公式可知, 在 z 轴方向的受力 (即浮力)

$$F_z=-\iint\limits_S \rho z\cos(\boldsymbol{n},z)\mathrm{d}S=-\rho\iiint\limits_V \mathrm{d}v=-\rho V=-m$$

(显然在 x 和 y 轴方向不受力) 这说明浮力方向垂直向上, 且等于物体排开液体的重量.

注: 可参看卓里奇第二卷 P219 例 3. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

第二十六章　场论初步

§26.1.5　练习题　学员: d39

1. 解答: 以下皆设 $\boldsymbol{a}=(P_1,Q_1,R_1),\boldsymbol{b}=(P_2,Q_2,R_2)$.

(1)

$$\begin{aligned}\nabla(\alpha f+\beta g)&=\boldsymbol{i}\frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial z}\\&=\alpha\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\beta\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial g}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial g}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial g}{\partial z}\right)\\&=\alpha\nabla f+\beta\nabla g\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})&=\mathrm{div}(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})\\&=\left(\frac{\partial\alpha P_1}{\partial x}+\frac{\partial\alpha Q_1}{\partial y}+\frac{\partial\alpha R_1}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial\beta P_2}{\partial x}+\frac{\partial\beta Q_2}{\partial y}+\frac{\partial\beta R_2}{\partial z}\right)\\&=\alpha\mathrm{div}\boldsymbol{a}+\beta\mathrm{div}\boldsymbol{b}=\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\beta\nabla\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\nabla\times(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})=\mathrm{curl}(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})\\=&\left[\frac{\partial(\alpha R_1+\beta R_2)}{\partial y}-\frac{\partial(\alpha Q_1+\beta Q_2)}{\partial z}\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial(\alpha P_1+\beta P_2)}{\partial z}-\frac{\partial(\alpha R_1+\beta R_2)}{\partial x}\right]\boldsymbol{j}\\&+\left[\frac{\partial(\alpha Q_1+\beta Q_2)}{\partial x}-\frac{\partial(\alpha P_1+\beta P_2)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k}\\=&\alpha\left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\\&+\beta\left[\left(\frac{\partial R_2}{\partial y}-\frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P_2}{\partial z}-\frac{\partial R_2}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x}-\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\\=&\alpha\mathrm{curl}\boldsymbol{a}+\beta\mathrm{curl}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\nabla(fg)&=\boldsymbol{i}\frac{\partial(fg)}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial(fg)}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial(fg)}{\partial z}\\&=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x}g+\frac{\partial g}{\partial x}f\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial f}{\partial y}g+\frac{\partial g}{\partial y}f\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial f}{\partial z}g+\frac{\partial g}{\partial z}f\right)\\&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)g+f\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial g}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial g}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial g}{\partial z}\right)\\&=(\nabla f)g+f(\nabla g)\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(5)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(f\boldsymbol{a}) &= \frac{\partial(fP_1)}{\partial x}+\frac{\partial(fQ_1)}{\partial y}+\frac{\partial(fR_1)}{\partial z}\\ &= \left(f\frac{\partial P_1}{\partial x}+P_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\left(f\frac{\partial Q_1}{\partial y}+Q_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(f\frac{\partial R_1}{\partial z}+R_1\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &= f\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial y}+\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)+\left(P_1\frac{\partial f}{\partial x}+Q_1\frac{\partial f}{\partial y}+R_1\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &= f(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+(\nabla f)\cdot\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\nabla\times(f\boldsymbol{a}) =&\boldsymbol{i}\left[\frac{\partial(fR_1)}{\partial y}-\frac{\partial(fQ_1)}{\partial z}\right]+\boldsymbol{j}\left[\frac{\partial(fP_1)}{\partial z}-\frac{\partial(fR_1)}{\partial x}\right]+\boldsymbol{k}\left[\frac{\partial(fQ_1)}{\partial x}-\frac{\partial(fP_1)}{\partial y}\right]\\ =&\boldsymbol{i}\left[f\left(\frac{R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)+\left(R_1\frac{\partial f}{\partial y}-Q_1\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\\ &+\boldsymbol{j}\left[f\left(\frac{P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)+\left(P_1\frac{\partial f}{\partial z}-R_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]\\ &+\boldsymbol{k}\left[f\left(\frac{Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)+\left(Q_1\frac{\partial f}{\partial x}-P_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\\ =&f\left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\\ &+\boldsymbol{i}\left(R_1\frac{\partial f}{\partial y}-Q_1\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(P_1\frac{\partial f}{\partial z}-R_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\left(Q_1\frac{\partial f}{\partial x}-P_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ =&f(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\nabla f)\times\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) =&\mathrm{div}(\nabla\times\boldsymbol{a})\\ =&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)\\ =&\left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 R_1}{\partial y\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 P_1}{\partial z\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x\partial z}\right)=0\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla f) &= \nabla\times\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$ □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

2. 解答:

(1) 按 $(i)\Rightarrow(iii)\Rightarrow(iv)\Rightarrow(ii)\Rightarrow(i)$ 来证明此命题:

$(i)\Rightarrow(iii)$: 设 $\boldsymbol{A}=(P,Q,R)$ 是有势场, 则存在势函数 u 使得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=R$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial y}&=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}\\ \frac{\partial P}{\partial z}&=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl}(\boldsymbol{A})=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是无旋场.

$(iii)\Rightarrow(iv)$: 由 Stokes 公式可知

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\iint_S \operatorname{curl}(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$$

$(iv)\Rightarrow(ii)$: 设起点 A 终点 B, 任给两条路径 Γ_1 和 Γ_2, 记 $-\Gamma_2$ 是反向的 Γ_2, 则 $\Gamma_1-\Gamma_2$ 构成闭回路, 从而

$$\oint_{\Gamma_1-\Gamma_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}s=0\Rightarrow\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}s$$

即积分与路径无关.

$(ii)\Rightarrow(i)$: 设 (a,b,c) 是 $\boldsymbol{A}$ 中的一个固定点, (x,y,z) 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一点, 定义函数

$$u(x,y,z)=\int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}s$$

取 $|h|$ 充分小, 由积分中值定理可知存在 x^* 介于 x 和 $x+h$ 之间使得

$$u(x+h,y,z)-u(x,y,z)=\int_{(x,y,z)}^{(x+h,y,z)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}s=\int_x^{x+h}P(t,y,z)\mathrm{d}t=hP(x^*,y,z)$$

由此得到

$$\frac{u(x+h,y,z)-u(x,y,z)}{h}=P(x^*,y,z)$$

两边令 $h\to 0$ 可知 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P$. 同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q,\dfrac{\partial u}{\partial z}=R$.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

(2) 先证 $(i) \Leftrightarrow (ii)$ 再证 $(i) \Leftrightarrow (iii)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: 记 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$, 直接验证

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \operatorname{div} \operatorname{curl} \boldsymbol{B} = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: 我们即要证明存在向量场 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ 使得

$$A_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}$$

为此只要解出上式成立的一个特解即可, 为此先令 $B_z = 0$, 则上式转化为

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = A_x, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = A_y$$

对 z 求积分可得

$$B_y = -\int_{z_0}^{z} A_x(x, y, z)\mathrm{d}z + u(x, y), \quad B_x = \int_{z_0}^{z} A_y(x, y, z)\mathrm{d}z$$

再对 x 求导可得

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}z + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}z$$

由 $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$ 可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_x(x, y, z_0)$$

再积分, 即得到了 $u(x, y, z)$, 从而 B_x, B_y, B_z 都找到了特解.

$(i) \Rightarrow (iii)$: 记任一闭曲面 Σ 围成区域是 Ω, 由 Gauss 公式可知

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: 类似第二十五章参考题第 3 题必要性的证明方法反证即可. □

3. 解答:

(1) 给定 $\boldsymbol{p}_0 \in V$, 当 $\dim V \to 0$ 时 V 缩向 $\boldsymbol{p}_0$. 利用 Gauss 公式和积分中值定理有

$$\lim_{\dim V \to 0} \frac{1}{|V|} \iint_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \lim_{\dim V \to 0} \frac{1}{|V|} \iiint_{V} \operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \operatorname{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0)$$

(2) 设 $\boldsymbol{A} = (P, Q, R)$, 则

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S=\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ P&Q&R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}[(\cos\beta R-\cos\gamma Q)\boldsymbol{i}+(\cos\gamma P-\cos\alpha R)\boldsymbol{j}+(\cos\alpha Q-\cos\beta P)\boldsymbol{k}]\mathrm{d}S$$

$$=\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}[(R\mathrm{d}z\mathrm{d}x-Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\boldsymbol{i}+(P\mathrm{d}x\mathrm{d}y-R\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\boldsymbol{j}+(Q\mathrm{d}y\mathrm{d}z-P\mathrm{d}z\mathrm{d}x)\boldsymbol{k}]$$

$$\overset{\text{Gauss}}{=\!=}\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\left[\iiint_{V}(R_y-Q_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{i}+\iiint_{V}(P_z-R_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{j}\right.$$
$$\left.+\iiint_{V}(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{k}\right]$$

$$\overset{\text{积分中值定理}}{=\!=}[(R_y-Q_z)\boldsymbol{i}+(P_z-R_x)\boldsymbol{j}+(Q_x-P_y)\boldsymbol{k}]\big|_{p_1}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0)$$

注: 在等式右边若略去极限运算事实上代表把场 $\boldsymbol{A}$ 内每一点的值都作用到了曲面在该点的切平面内, 并与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0)$ 正交. 向量的长即相当于原向量值投影到这点切平面上的大小, 然后沿曲面积分. 这恰巧对应着 $\mathbb{R}^3$ 中二维曲面 Poincaré—Hopf 定理 (第二十四章第二组参考题第 1 题注中提及) 的应用.

(3)

$$\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}\varphi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_{\Sigma}\varphi(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k})\mathrm{d}S$$

$$=\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\left(\iint_{\Sigma}\varphi\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{i}+\iint_{\Sigma}\varphi\mathrm{d}z\mathrm{d}x\boldsymbol{j}+\iint_{\Sigma}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{k}\right)$$

$$\overset{\text{Gauss}}{=\!=}\lim_{\dim V\to 0}\frac{1}{|V|}\iiint_{V}(\varphi_x\boldsymbol{i}+\varphi_y\boldsymbol{j}+\varphi_z k)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{积分中值定理}}{=\!=}(\varphi_x\boldsymbol{i}+\varphi_y\boldsymbol{j}+\varphi_z\boldsymbol{k})\big|_{p_0}=\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{p}_0)$$

□

4. 解答:

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}f(r)=&\frac{\partial f(r)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\boldsymbol{k}\\ =&f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i}+f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j}+f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}\\ =&f'(r)\mathrm{grad}r=f'(r)\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right)=f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(f(r)\boldsymbol{r})\overset{(26.11)}{=\!=}&f(r)\mathrm{div}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}f(r)\\ =&3f(r)+\boldsymbol{r}\cdot f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}=3f(r)+rf'(r)\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}(f(r)\boldsymbol{r}) &\xlongequal{(26.12)} \nabla\times(f(r)\boldsymbol{r}) = f(r)(\nabla\times\boldsymbol{r}) + (\nabla f(r))\times\boldsymbol{r}\\ &= 0 + f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

□

5. 解答:

(1)

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

(2) 设 $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ c_x & c_y & c_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (c_y z - c_z y)\boldsymbol{i} + (c_z x - c_x z)\boldsymbol{j} + (c_x y - c_y x)\boldsymbol{k}$$

于是

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ c_y z - c_z y & c_z x - c_x z & c_x y - c_y x \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{c}$$

□

6. 解答: 根据第 4 题的结论可知 $f(r)$ 满足微分方程

$$3f(r) + rf'(r) = 0 \Rightarrow \frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r}$$

两边积分可得 $f(r) = \dfrac{C}{r^3}$(C 为常数).

□

7. 解答: 记 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$. 由题设可知 $\operatorname{curl}\boldsymbol{A} = \operatorname{curl}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, 则

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) =& \frac{\partial}{\partial x}(A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_x B_y - A_y B_x)\\ =& B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\ & - A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) - A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) - A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\\ =& \boldsymbol{B}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{B} = 0\end{aligned}$$

因此, 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是无旋场, 则 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是无源场.

□

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

§26.2.4　练习题　学员: d39

1. 解答:

(1) 练习题 26.1.5 第 1 题 (8) 中已证.

(2)

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}\right)-\nabla\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z\partial x},\frac{\partial^2 a_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 a_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z^2}\right)$$

$$-\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial a_3}{\partial y}-\dfrac{\partial a_2}{\partial z}&\dfrac{\partial a_1}{\partial z}-\dfrac{\partial a_3}{\partial x}&\dfrac{\partial a_2}{\partial x}-\dfrac{\partial a_1}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z\partial x},\frac{\partial^2 a_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 a_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z^2}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 a_2}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 a_3}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_1}{\partial y\partial x},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 a_1}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 a_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 a_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial z\partial y}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2},\frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2},\frac{\partial^2 a_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial z^2}\right)$$

$$=(\Delta a_1,\Delta a_2,\Delta a_3)=\Delta\boldsymbol{a}$$ □

2. 解答:

$$\iint_\Sigma\left(v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_\Sigma\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_\Omega\left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_\Omega(v\Delta u-u\Delta v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

注: 第二 Green 恒等式常常将等式两边写成行列式的形式. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

3. 解答: 首先有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S &= \iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + u\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + u\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\ &= \iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \iiint\limits_{V} u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由于 u 在 Ω 上调和, 第一项为 0, 故

$$\iiint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S$$

证明调和函数的唯一性即证明如果两个调和函数的值在边界上都相同, 那么整个区域上 (包含内部) 都相同. 设 u_1, u_2 是调和函数且在边界 Σ 上 $u_1 = u_2$, 显然 $u = u_1 - u_2$ 也是调和函数且在 Σ 上 $u = 0$, 于是由已证结论可知

$$\iiint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

得到 $|\nabla u| = 0$, 也即 $u_x = u_y = u_z = 0$, 从而 $u \equiv 0$(严谨的证明参见练习题 19.2.4 第 7 题), 即 $u_1 \equiv u_2$. □

4. 解答: 取 $v(x,y,z) = \dfrac{1}{\rho}$, 其中 $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, 则

$$\nabla v = -\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho = -\frac{1}{\rho^2}\frac{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}{\rho}$$

任取 $0 < \varepsilon < r \leqslant R$, 记 $\Omega_\varepsilon = B_r(\boldsymbol{M}_0)\backslash B_\varepsilon(\boldsymbol{M}_0)$, 由第二 Green 恒等式 (第 2 题), 可得

$$\iint\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = \iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}(v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

即

$$\iint\limits_{B_r(M_0)}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S + \iint\limits_{B_\varepsilon(M_0)}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = 0 \qquad (*)$$

又因为

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\partial B_r(M_0)} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = \iint\limits_{\partial B_r(M_0)} u\nabla v\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\\ =&\iint\limits_{\partial B_r(M_0)} u\left[-\frac{1}{\rho^2}\frac{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}{\rho}\cdot\frac{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}{\rho}\right]\mathrm{d}S\end{aligned}$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$= - \iint\limits_{\partial B_r(M_0)} \frac{u}{\rho^2} \mathrm{d}S = -\frac{1}{r^2} \iint\limits_{\partial B_r(M_0)} u \mathrm{d}S$$

$$\left| \iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M_0)} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \right| \leqslant \iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M_0)} |v| \left| \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right| \mathrm{d}S \leqslant \iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M_0)} \frac{1}{\varepsilon} |\nabla u| \mathrm{d}S$$

$$= 4\pi\varepsilon \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M_0)} |\nabla u| \mathrm{d}S \right] \to 0, \varepsilon \to 0^+$$

得到

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M_0)} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = 0$$

另一方面

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M_0)} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S &= \iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M_0)} u \nabla v \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \\ &= \iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M_0)} u \left\{ -\frac{1}{\rho^2} \frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{\rho} \cdot \left[-\frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{\rho} \right] \right\} \mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M_0)} u \mathrm{d}S = 4\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(M_0)} u \mathrm{d}S \to 4\pi u\left(\boldsymbol{M}_0\right), \varepsilon \to 0^+ \end{aligned}$$

得到

$$\iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M_0)} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = 4\pi u\left(\boldsymbol{M}_0\right)$$

在 $(*)$ 式两边令 $\varepsilon \to 0^+$ 可得

$$- \left[-\frac{1}{r^2} \iint\limits_{\partial B_r(M_0)} u \mathrm{d}S \right] - 4\pi u\left(\boldsymbol{M}_0\right) = 0$$

即

$$\iint\limits_{\partial B_r(M_0)} u \mathrm{d}S = 4\pi r^2 u(\boldsymbol{M}_0)$$

两边关于 r 在 $[0, R]$ 上积分, 可得

$$\iiint\limits_{B_R(M_0)} u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^R \mathrm{d}r \iint\limits_{\partial B_r(M_0)} u \mathrm{d}S = 4\pi u\left(\boldsymbol{M}_0\right) \int_0^R r^2 \mathrm{d}r = \frac{4\pi R^3}{3} u\left(\boldsymbol{M}_0\right)$$

移项即得结论.

注: 对于 n 维形式的平均值定理证明思路是一样的, 可参见 GT《二阶椭圆型偏微分方

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

程》定理 2.1.(此时 n 维球体的体积需要运用第十九章参考题第 7 题注中的结论) □

5. 解答: 设 $v(x',y')=u(Rx,Ry)$, 则 u 调和等价于 v 调和, 由命题 26.2.1 可知

$$\begin{aligned}&u(r\cos\theta,r\sin\theta)=v\left(\frac{r}{R}\cos\theta,\frac{r}{R}\sin\theta\right)\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R\cos\varphi,R\sin\varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

注: 其他证明方法可参见谷超豪《数学物理方程》第三章 3.3. 在复平面上的 Poisson 积分公式类似, 参见钟玉泉《复变函数论》第九章第 2 节. n 维形式的 Poisson 积分公式可参看 GT《二阶椭圆型偏微分方程》公式 (2.26), Evans 2.2.1 定理 1. □

6. 解答: 将 u 改写为

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\frac{1-x^2-y^2}{1-2(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+x^2+y^2}\mathrm{d}\varphi$$

根据含参变量常义积分求导可交换的性质, 且积分可以线性运算, 方便起见省去积分符号, 并记

$$A=1-x^2-y^2,\quad B=1-2(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+x^2+y^2$$

则

$$A_x=-2x,\quad A_{xx}=-2,\quad A_y=-2y,\quad A_{yy}=-2$$

$$B_x=-2\cos\varphi+2x,\quad B_{xx}=2,\quad B_y=-2\sin x+2y,\quad B_{yy}=2$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{A}{B}\right)_x&=\frac{A_xB-AB_x}{B^2}\\\left(\frac{A}{B}\right)_{xx}&=\frac{-2B(A+B)-2BB_xA_x+2AB_x^2}{B^3}\\\Delta\left(\frac{A}{B}\right)&=-\frac{-4B(A+B)-2B(A_xB_x+A_yB_y)+2A(B_x^2+B_y^2)}{B^3}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}B_x^2+B_y^2=&4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi+4x^2+4y^2-8x\cos\varphi-8y\sin\varphi=4B\\A_xB_x+A_yB_y=&4x\cos\varphi-4x^2+4y\sin\varphi-4y^2=2(A-B)\end{aligned}$$

因此

$$\Delta\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{-4BA-4B^2-4BA+4B^2+8AB}{B^3}=0$$

注: 因此 Poisson 积分公式也给出了单位圆盘上 Dirichlet 问题的解, 参见菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第三卷 P500. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

7. 解答: 根据 Poisson 积分公式, 显然积分内的函数无限次可微, 因而由含参变量常义积分求导可交换的性质, 任意调和函数都是无限次可微的 (事实上也解析).
注: 还可以利用 Poisson 方程 $\Delta u = f$ 的 Schauder 估计理论 (PDE 最经典的估计理论之一), 即

$$[u]_{k+2,\alpha} \leqslant C \cdot [f]_{k,\alpha}$$

其中 $[\cdot]_{k,\alpha}, 0 < \alpha < 1$ 是 Holder(半) 模. 代入 Laplace 方程得

$$[u]_{k+2,\alpha} \leqslant C \cdot [0]_{k,\alpha} = 0 \Rightarrow u \in C^{k+2,\alpha}$$

具体详情可见 GT《二阶椭圆型偏微分方程》第六章. □

8. 解答: 由于

$$\begin{aligned} \partial^i g \circ f(x) &= g'(f(x))\partial^i f(x) \\ \partial^{ii} g \circ f(x) &= g''(f(x))\left[\partial^i f(x)\right]^2 + g'(f(x))\partial^{ii} f(x) \end{aligned}$$

而 f 和 $g \circ f$ 都是调和函数, 故

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{n} \partial^{ii} g \circ f(x) =& g''(f(x)) \sum_{i=1}^{n} \left[\partial^i f(x)\right]^2 + g'(f(x)) \sum_{i=1}^{n} \partial^{ii} f(x) \\ =& g''(f(x)) \sum_{i=1}^{n} \left[\partial^i f(x)\right]^2 \end{aligned}$$

又 f 非常值函数, 故 $\sum_{i=1}^{n} \left[\partial^i f(x)\right]^2 > 0$, 从而 $g''(f(x)) = 0$, g 是线性函数. □

9. 解答: 证明必要性即证

$$\iiint_D \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S$$

这就是 (26.15). □

§26.3.2　参考题　学员: d39

第一组参考题　学员: d39

1. 解答:
(1) 记 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$. 所需证明恒等式即为

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$
\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\\
=&\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ A_x&A_y&A_x\\ \operatorname{curl}_x B&\operatorname{curl}_y B&\operatorname{curl}_z B\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ B_x&B_y&B_z\\ \operatorname{curl}_x A&\operatorname{curl}_y A&\operatorname{curl}_x A\end{vmatrix}\\
&+\left(B_x\frac{\partial}{\partial x}+B_y\frac{\partial}{\partial y}+B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(A_x\boldsymbol{i}+A_x\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\\
&+\left(A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

对 $\boldsymbol{i}$ 分量而言

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\\
=&\begin{vmatrix}A_y&A_x\\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z}-\dfrac{\partial B_z}{\partial x}&\dfrac{\partial B_y}{\partial x}-\dfrac{\partial B_x}{\partial y}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}B_y&B_z\\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}&\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{vmatrix}\\
&+B_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+B_z\frac{\partial A_x}{\partial z}+A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}
\end{aligned}
$$

类似可检验对 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分量都成立.

(2)

$$
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ A_x&A_y&A_z\\ B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}
$$

所需证明恒等式即为

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_yB_z-A_zB_y&A_zB_x-A_xB_z&A_xB_y-A_yB_x\end{vmatrix}\\
=&\left(B_x\frac{\partial}{\partial x}+B_y\frac{\partial}{\partial y}+B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(A_x\boldsymbol{i}+A_x\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\\
&-\left(A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})\\
&+\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)(A_x\boldsymbol{i}+A_x\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\\
&-\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

对 i 分量而言

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(A_xB_y-A_yB_x)=&B_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+B_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\\&-A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}-A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}-A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\\&+\frac{\partial B_x}{\partial x}A_x+\frac{\partial B_y}{\partial y}A_x+\frac{\partial B_z}{\partial z}A_x\\&-\frac{\partial A_x}{\partial x}B_x-\frac{\partial A_y}{\partial y}B_x-\frac{\partial A_z}{\partial z}B_x\end{aligned}$$

类似可检验对 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分量都成立.

注: 裴礼文 P1022 有较全面的场论公式总结. □

2. 解答: 只需要证明

$$\nabla\times[t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\times\boldsymbol{r}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t^2\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\right]$$

再两边对 t 从 0 到 1 积分即得结论. 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$, 由上一题 (2) 可知

$$\begin{aligned}\nabla\times[t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\times\boldsymbol{r}]=&(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)-(t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\cdot\nabla)\boldsymbol{r}\\&+(\nabla\cdot\boldsymbol{r})t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)-(\nabla\cdot t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz))\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

依次计算

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)=&t\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\\=&t\left[x\frac{\partial\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)}{\partial x}+y\frac{\partial\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)}{\partial y}+z\frac{\partial\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)}{\partial z}\right]\\=&t^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{r})t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)=t\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)=3t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)$$

$$(tF(tx,ty,tz)\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=t\left[P(tx,ty,tz)\frac{\partial}{\partial x}+Q(tx,ty,tz)\frac{\partial}{\partial y}+R(tx,ty,tz)\frac{\partial}{\partial z}\right]\boldsymbol{r}$$

$$\begin{aligned}=&tP(tx,ty,tz)\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}+tQ(tx,ty,tz)\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}+tR(tx,ty,tz)\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}\\=&tP(tx,ty,tz)\boldsymbol{i}+tQ(tx,ty,tz)\boldsymbol{j}+tR(tx,ty,tz)\boldsymbol{k}=t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\end{aligned}$$

由题设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 是无源场, 则 $\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)$ 也是无源场, 从而

$$\nabla\cdot t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\boldsymbol{r}=t\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$$

综上所述可得

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\begin{aligned}\nabla\times[t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\times\boldsymbol{r}]=&t^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)}{\mathrm{d}t}+2t\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\\=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t^2\boldsymbol{F}(tx,ty,tz)\right]\end{aligned}$$

证毕. □

3. 解答: 由题设有

$$\nabla\cdot(\nabla\times B)=\nabla\cdot\frac{1}{r}(\nabla r\times A)$$

用性质 (26.13) 可知

$$\nabla\cdot\frac{1}{r}(\nabla r\times\boldsymbol{A})=0$$

又

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left[\frac{1}{r}(\nabla r\times\boldsymbol{A})\right]=&\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot(\nabla r\times\boldsymbol{A})+\frac{1}{r}\nabla\cdot(\nabla r\times\boldsymbol{A})\\=&-\frac{\nabla r}{r^2}\cdot(\nabla r\times\boldsymbol{A})+\frac{1}{r}\nabla\cdot(\nabla r\times\boldsymbol{A})=\frac{1}{r}\nabla\cdot(\nabla r\times\boldsymbol{A})\\=&\frac{1}{r}[\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\nabla r)-\nabla r\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})]=-\frac{1}{r}\nabla r\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\nabla r\cdot(\nabla\times A)=0\Rightarrow\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0\Rightarrow\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

记 Γ 围成区域为 D, 则由 Stokes 公式有

$$\oint_\Gamma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\iint_D\mathrm{curl}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$$ □

4. 解答: 记 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\nabla F}{|\nabla F|}$, 由 Green 公式 (26.4) 得

$$\iint_D\nabla\cdot\boldsymbol{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}(-\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=-\oint_{\partial D}\mathrm{d}s=-l$$

注: 中间需要注意到 $\boldsymbol{a}$ 在 ∂D 上是单位内法向量. □

5. 解答: 由积分中值定理显然有

$$\lim_{R\to0}F(R)=u(\boldsymbol{M})$$

根据 (25.28), 可将 $F(R)$ 改写为

$$F(R)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial B_R(\mathbf{0})}u(\boldsymbol{M}+R\boldsymbol{n})\mathrm{d}s$$

现在记 $K(R)=F(R)-u(M)$, 依次计算 $K(R)$ 的各项导数.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$K(R)=F(R)-u(\boldsymbol{M})=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial B_R(0)}u(\boldsymbol{M}+R\boldsymbol{n})-u(\boldsymbol{M})\mathrm{d}s$$

类似 (26.18) 可知

$$K'(R)=\lim_{R\to 0}\frac{1}{4\pi R^2}\iiint\limits_{B_R(M)}\Delta u\mathrm{d}V=\frac{R}{3}\Delta u(\boldsymbol{M})$$

类似 (26.19) 可知

$$K''(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\partial B_R(M)}\Delta u\mathrm{d}S_R-\frac{1}{2\pi R^3}\iiint\limits_{B_R(M)}\Delta u\mathrm{d}V$$

注意到

$$K''(R)+\frac{2}{R}K'(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\partial B_R(M)}\Delta u(\boldsymbol{M}+R\boldsymbol{n})\mathrm{d}S_R=\Delta u(\boldsymbol{M})$$

因此

$$K''(R)=\Delta u(\boldsymbol{M})-\frac{2}{3}\Delta u(\boldsymbol{M})=\frac{1}{3}\Delta u(\boldsymbol{M})$$

也就是说

$$F'(0)=0,F''(0)=\frac{1}{3}\Delta u(\boldsymbol{M})$$

则由 Taylor 公式, 当 $R\to 0$ 时有

$$F(R)-u(\boldsymbol{M})=F'(0)R+\frac{F''(0)}{2}R^2+o(R^2)=\frac{1}{6}\Delta u(\boldsymbol{M})R^2+o(R^2)$$

即 $F(R)-u(\boldsymbol{M})$ 的主要部分是 $\dfrac{1}{6}\Delta u(\boldsymbol{M})$. □

6. 解答: 由 u 调和知 $\Delta u=0$, 由第一 Green 恒等式 (例题 26.2.1) 知

$$0=\iiint\limits_{\Omega}(u-v)\Delta\boldsymbol{u}=\iint\limits_{\partial\Omega}(u-v)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}\nabla(u-v)\nabla u$$

题设在 $\partial\Omega$ 上 $u=v$, 故

$$\iiint\limits_{\Omega}\nabla(u-v)\nabla u=0\Rightarrow\iiint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2=\iiint\limits_{\Omega}\nabla u\nabla v$$

由基本不等式

$$\iiint\limits_{\Omega}\nabla u\nabla v\leqslant\frac{1}{2}\left(\iiint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2+\iiint\limits_{\Omega}|\nabla v|^2\right)$$

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

整理即得

$$\iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 \leqslant \iiint_{\Omega} |\nabla v|^2$$

证毕. □

7. 解答: 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\theta$$

$$\iint_{x^2+y^2<1} \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 r\mathrm{d}r \oint_{x^2+y^2=r^2} \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x$$

由 Green 公式

$$\begin{aligned}\oint_{x^2+y^2=r^2} \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x &= \iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^r e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho = \pi(1-e^{-r^2})\end{aligned}$$

因此

$$\iint_{x^2+y^2<1} \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi r(1-e^{-r^2})\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}$$

注: 其他方法参见蒲和平 P187 例 21. □

第二组参考题 学员: d39

1. 解答: 设 G 是 Ω 内的球, 设 v 是由 Poisson 积分公式给定的势函数, 则在 $\partial\Omega$ 上满足 $\Delta v = 0$, 在 ∂G 上满足 $v = u$(因为 v 调和, 也满足平均值公式). 由于 u, v 都满足平均值公式, 必然 $u - v$ 也满足平均值公式, 因而满足极值原理. 但在 ∂G 上 $u - v = 0$, 所以在 G 上 $u \equiv v$. 那么根据 G 的任意性可知在 Ω 上满足 $\Delta u = 0$, 即 u 是调和函数.

注: 其他方法参见柯朗《数学物理方法》第四章 1.3 节. □

2. 解答: 以 f_n 表示调和函数 u_n 在 ∂B_R 上的值. 按题设, 连续函数序列 $\{f_n\}$ 在 ∂B_R 上一致收敛, 即对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在这样的 N, 使得当 $n, m > N$ 时, 在 ∂B 上处处有 $|f_n - f_m| \leqslant \varepsilon$. 由极值原理, 对于这些 n, m, 在 B_R 中处处有 $|u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$, 所以由 Cauchy 准则知调和函数序列 $\{u_n\}$ 在 B_R 中也一致收敛. 为证明其极限函数是调和函数, 只要证明 u 在 B_R 中任意一点的邻域中是调和函数就可以了. 为此, 在 B_R 内任取一点 M_0, 以 M_0 为中心作一位于 B_R 内的球 G, 在此球上, 每一个调和函数 u_n 均可用 Poisson 积分公式表示为

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$
\begin{aligned}
&u_n(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)\\
=&\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u_n(R,\theta,\varphi)\cdot\frac{(R^2-\rho_0^2)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\left\{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\left[\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)\right]\right\}^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

其中 R 是球 G 的半径, $(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$ 是点 M_0 的球坐标. 因为函数列 $\{u_n(R,\theta,\varphi)\}$ 一致收敛于 u, 在上式两边令 $u\to\infty$ 取极限就得到

$$
\begin{aligned}
&u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)\\
=&\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(R,\theta,\varphi)\cdot\frac{(R^2-\rho_0^2)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\left\{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\left[\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)\right]\right\}^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

由于 u 可被 Poisson 积分公式表示, 由练习题 26.2.4 第 6 题可知极限函数 u 是调和函数, 证毕.

注: 此命题是 Harnack 第一定理, 还有 Harnack 第二定理, 参见谷超豪《数学物理方程》定理 3.2. □

3. 解答:

必要性: 由题设有

$$
\iiint\limits_{B_R(M_0)}\Delta u\mathrm{d}V\geqslant 0
$$

由 (26.15) 和 (25.28) 知

$$
\iint\limits_{\partial B_R(M_0)}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=R^2\iint\limits_{\partial B_1(\mathbf{0})}\frac{\partial u}{\partial R}(\boldsymbol{M}_0+R\boldsymbol{n})\mathrm{d}S_1\geqslant 0
$$

即有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[R^{-2}\iint\limits_{\partial B_R(\mathbf{0})}u(\boldsymbol{M}_0+R\boldsymbol{n})\mathrm{d}S_R\right]\geqslant 0
$$

当 $R\to 0^+$ 时

$$
R^{-2}\iint\limits_{\partial B_R(\mathbf{0})}u(\boldsymbol{M}_0+R\boldsymbol{n})\mathrm{d}S_R\to 4\pi u(\boldsymbol{M}_0)
$$

故 $\forall R>0$ 有

$$
\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\partial B_R(M_0)}u(x,y,z)\mathrm{d}S\geqslant u(\boldsymbol{M}_0)
$$

充分性: 在本章第一组参考题第 5 题中我们证得

$$
F(R)-u(\boldsymbol{M}_0)=F'(0)R+\frac{F''(0)}{2}R^2+o(R^2)=\frac{1}{6}\Delta u(\boldsymbol{M}_0)R^2+o(R^2)
$$

由题设可知 $F(R)\geqslant u(\boldsymbol{M}_0)$, 所以必然 $\Delta u(\boldsymbol{M}_0)\geqslant 0$, 由 $\boldsymbol{M}_0$ 的任意性可知 $\Delta u\geqslant 0$ 在 D 上恒成立.

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

注: 也可以在平均值公式原本的证明中修改符号, 方法是一样的, 具体可参见 GT《二阶椭圆型偏微分方程》定理 2.1(含 n 维情形). □

4. 解答: 在第二 Green 恒等式 (练习题 26.2.4 第 2 题) 中令 $v=1/r$, 则知当 $(\xi,\eta,\zeta)\neq(x,y,z)$ 时有 $\Delta v=0$. 现以点 $\boldsymbol{P}(x,y,z)$ 为中心, ρ 为半径作一球面 S_ρ 含于曲面内, 积分区域限定在 $S+S_\rho$ 所包围的区域 V 内, 即得

$$\iint\limits_{S+S_\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S=0$$

即

$$\iint\limits_{S_\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S=-\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S=0$$

显然 S 上的法线是向外的, 而 S_ρ 上的法线是指向球心的, 因此

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}=-\frac{\partial(1/r)}{\partial r}\bigg|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho^2}$$

于是, 我们有

$$\iint\limits_{S_\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-\frac{u}{\rho^2}\right)\mathrm{d}S=-\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S$$

但

$$\iint\limits_{S_\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\frac{1}{\rho}\iint\limits_{S_\rho}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0$$

又由积分中值定理, 得

$$\iint\limits_{S_\rho}\frac{u}{\rho^2}\mathrm{d}S=\frac{1}{\rho^2}u\left(x',y',z'\right)4\pi\rho^2=4\pi u\left(x',y',z'\right)$$

其中 $u(x',y',z')$ 为函数 u 在球面 S_ρ 上某点之值. 从而

$$u\left(x',y',z'\right)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S$$

上式右端与 ρ 无关, 而 $\lim\limits_{\rho\to0^+}u\left(x',y',z'\right)=u(x,y,z)$, 因此, 令 $\rho\to0^+$ 即得

$$u\left(x,y,z\right)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S$$

又由于

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial(1/r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}}=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\cos\alpha+\frac{\partial r}{\partial \eta}\cos\beta+\frac{\partial r}{\partial \zeta}\cos\gamma\right)$$
$$=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)=-\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}$$

最后便得到

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[u(\xi,\eta,\zeta)\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S$$

至此证毕. □

5. 解答: 不失一般性, 可设 $(x_0,y_0)=(0,0)$. 利用 Poisson 积分公式有

$$\begin{aligned}u(r\cos\theta,r\sin\theta)=&\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R\cos\varphi,R\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\\ \leqslant&\frac{R^2-r^2}{2\pi(R-r)^2}\int_0^{2\pi}u(R\cos\varphi,R\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ =&\frac{R+r}{R-r}u(0,0)\end{aligned}$$

(最后一步是在 Poisson 积分公式中取 $r=0$ 得到的)

同理,

$$\begin{aligned}u(r\cos\theta,r\sin\theta)=&\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R\cos\varphi,R\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\\ \geqslant&\frac{R^2-r^2}{2\pi(R+r)^2}\int_0^{2\pi}u(R\cos\varphi,R\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ =&\frac{R-r}{R+r}u(0,0)\end{aligned}$$

注: 通过 n 维的 Poisson 公式用同样的技巧我们可以证明推广的命题 (Harnack 不等式)

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2}\frac{R-r}{R+r}u(\boldsymbol{P})\leqslant u(\boldsymbol{Q})\leqslant\left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2}\frac{R+r}{R-r}u(\boldsymbol{P})$$

其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 是 n 维球内任意两点. □

6. 解答: 利用上一题的结论, 取定 r, 令 $R\to+\infty$, 即得 $u(x,y)\equiv u(0,0)$.

注: 对于 n 维情形的命题 (Liouville 定理) 可参见陈祖墀《偏微分方程》定理 5.3.5. □

内部讲义, 禁止流通; 不作商用, 侵权必究。