高数B上. HW7.

习题4.1.

2.(1) $f(-1)=f(1)=0$. 满足条件. $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 上存在 ✓

$f'(x)=m(1+x)^{m-1}(1-x)^n-n(1+x)^m(1-x)^{n-1}$

$=(1+x)^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-mx-n-nx)$

令 $f'(x)=0$ 得 $c=\frac{m-n}{m+n}\in(-1,1)$.

(2) $f(-1)=f(1)=0$. $f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $x\neq 0$.

在0处, $f'(x)$ 不存在. 不满足Rolle中值条件.

事实上, $f'(x)\neq 0$. $\forall x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

4.(1) $|\sin x-\sin y|=|\cos\xi|\cdot|x-y|\leq|x-y|$. ✓

(2) $|\tan y-\tan x|=\left|\frac{1}{\cos^2\xi}\right|\cdot|y-x|\geq|y-x|$.

(3) $\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=\frac{1}{\xi}(b-a)$. $\xi\in(a,b)$.

$\frac{b-a}{b}<$ $<\frac{b-a}{a}$ 口.

5. 证明: $P(-1)=P(1)=P(-2)=P(2)=0$. $P'(x)$ 总存在.

由Rolle定理 $\exists x_1,x_2,x_3$. $-2<x_1<-1<x_2<1<x_3<2$.

s.t. $P'(x_i)=0$. $i=1,2,3$. 口.

6. 证明: $f(x)$ 原函数 $F(x)=C_1\sin x+\frac{C_2}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{C_n}{n}\sin nx$.

$F(0)=F(\pi)=0$. 由Rolle定理, $\exists\xi\in(0,\pi)$

s.t. $f(\xi)=F'(\xi)=0$. 口.

8. 证明: 记 $b=f(0)$. 若 $\exists x_0$ s.t. $f(x_0)\neq kx_0+b$.

则 $\exists\xi\in(0,x_0)$ 或 $(x_0,0)$ s.t. $f'(\xi)=\frac{f(x_0)-b}{x_0-0}\neq k$. 矛盾.

故 $f(x)=kx+b$. $\forall x\in\mathbb{R}$. 口.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

9. (1). $x=0$ 时, LHS $= 0+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ✓.

✓ 又左式求导 $=0$. 故 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x\in[-1,1]$.

(2) $x=0$ 时, $0=0$ ✓.

两边求导 $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$ ✓

故 $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. $x\in\mathbb{R}$. □.

10. 证明: $\sin x < x$ 显然. 下证 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上, $\frac{2}{\pi}x < \sin x$.

若不然, $\exists \xi\in(0,\frac{\pi}{2})$ s.t. $\sin\xi - \frac{2}{\pi}\xi = 0$.

令 $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$. 有 $f(0) = f(\xi) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

由 Rolle 定理, $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上至少 2 个根.

单 $\cos x - \frac{2}{\pi}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 ↓ 矛盾! 故 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上

$\sin x > \frac{2}{\pi}x$. □.

11. ✓ 证明: 设 $\lim_{x\to x_0} f'(x) = L$.

由中值定理. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_x)$. ξ_x 在 x_0, x 之间.

12. ═

$\exists \xi_x$ s.t.

令 $x\to x_0$. 也有 $\xi_x \to x_0$. 故 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\xi_x\to x_0} f'(\xi_x) = L$

由定义, $f'(x_0) = L$. 即 $\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$. □.

习题 4.2.

3. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\ln(1+x)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(x+\sqrt{1+x^2}-1)\cdot x} \overset{L'H}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x + \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 1}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{2x\sqrt{1+x^2}+1+x^2+x^2-\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{(2x-1)\sqrt{1+x^2}+1+2x^2}$

$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{2\sqrt{1+x^2} + \frac{x(2x-1)}{\sqrt{1+x^2}} + 4x} = -\frac{1}{2}$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

6. $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x \quad (\alpha > 0)$.

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\alpha}\cdot x^\alpha = 0$.

7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$ 令 $y = e^{-\frac{1}{x^2}} \to 0$

$= \lim_{y\to 0^+} y(\ln y)^{50} = 0$ (同 6.).

8. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{2x-\pi}$ 取对数. $\underbrace{(2x-\pi)}_{0} \cdot \underbrace{\ln\tan x}_{+\infty}$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\frac{1}{\ln\tan x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{-\frac{1}{(\ln\tan x)^2}\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}$

$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} -2(\ln\tan x)^2 \cdot \sin x\cos x$.

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} -\frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cos x}$

$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-(2x-\pi)^2}{\sin 2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{4\pi - 8x}{2\cos 2x} = 0$.

原极限 $= e^0 = 1$.

9. $\lim_{x\to\infty} (a^{\frac{1}{x}} - 1)x$. $(a > 0)$. 令 $y = \frac{1}{x} \to 0$.

$= \lim_{y\to 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln a$.

10. $\lim_{y\to 0} \frac{y - \arcsin y}{\sin^3 y} = \lim_{y\to 0} \frac{y-\arcsin y}{y^3} \overset{L'H}{=} \lim_{y\to 0} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}{3y^2}$

$\overset{L'H}{=} \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{1}{1-y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}}{6y} = -\frac{1}{6}$.

12. $\lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x^4} \overset{t=-x^2}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1+t-e^t}{t^2}$

$\overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1-e^t}{2t} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-e^t}{2} = -\frac{1}{2}$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

13. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. 取对数 $\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arctan x}{x}$.

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\arctan x-\ln x}{x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\arctan x(1+x^2)}-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\arctan x}{2x^2\arctan x\cdot(1+x^2)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\arctan x}{2x^3}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-1-2x\arctan x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}-\frac{\arctan x}{3x}=-\frac{1}{3}$.

原极限 $=e^{-\frac{1}{3}}$.

16. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x+\sin x}{2x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x+\cos x}{2}=1$.

17. $\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$. $(x^x)'=x^x(1+\ln x)$

$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\ln x)-1}{\frac{1}{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(1+\ln x)-x}{1-x}$ $(x^{x+1})'=x^{x+1}(1+\frac{1}{x}+\ln x)$

$=x^{x+1}+x^x+x^{x+1}\ln x$

$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(1+\ln x)^2+x^x\cdot(1+\ln x)+x^{x+1}(\frac{1}{x})-1}{-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(1+\ln x)^2+x^x(2+\ln x)-1}{-1}=\frac{1+2-1}{-1}=-2$.

18. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$. 取对数 $x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln(\arctan x)}{\frac{1}{x}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x\cdot(1+x^2)}}{-x^{-2}}$

$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{2}{\pi}=-\frac{2}{\pi}$. 原极限 $=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App