2025.5.26. 广义积分.

0. Taylor 级数.

① 求 $f(x)=x^3e^{x^2}$ 的 Taylor 展开 ($x_0=0$).

$$f(x)=x^3\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+3}}{n!}.$$

② 证明 Euler 公式 $e^{ix}=\cos x+i\cdot\sin x$.

证明: $e^{ix}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot i+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{x^{2n}}$$

$$=i\cdot\sin x+\cos x. \qquad \square$$

Rmk. $e^x=\cosh x+\sinh x$.

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cosh x+\sinh x.$$

可以认为, $\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{cases}$ $\begin{cases}\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\\ \sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\end{cases}$

从而 $\cosh x=\cos(ix)$, $\sinh x=i\sin(ix)$

③ C^ω 与 C^∞ 的差别.

$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0.\end{cases}$ 易证 $f^{(n)}(0)=0$. $\forall n\in\mathbb{N}$

故 $f\in C^\infty$

但在 $x_0=0$ 处 Taylor 展开是 $T(x)=0$. $\neq f(x)$

即 $f\notin C^\omega$.

注：关于Taylor展开，有以下小情况

(i) $f\in C^k$，$f\notin C^\infty$. 则没有Taylor级数

(ii) $f\in C^\infty$，有Taylor级数，但不收敛.

Eg. $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^n\cdot e^{in^2x}$ 由一致收敛性知 $f\in C^\infty$.

计算知 $f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(in^2)^k e^{in^2x}$. 可以证明收敛半径是0.

Taylor级数.

(iii) $f\in C^\infty$，Taylor级数收敛，但不收敛于 $f(x)$.

Eg. $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0.\end{cases}$

(iv) $f\in C^\omega$. 即Taylor级数收敛于 $f(x)$ 自身.

④ 求 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$，$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$

$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. 令 $x=1$. 知 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$.

$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. 令 $x=1$. 知 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{e-e^{-1}}{2}$.

$(=\sinh 1)$.

⑤ $f(x)=\frac{x+2}{(1-x)^2}$. 求 $f^{(n)}(0)$.

令 $g(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$

$g'(x)=-\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots$

故 $f(x)=-(x+2)(1+2x+3x^2+\cdots)$ $\to\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$

其 x^n 系数是 $-(n+2(n+1))=-3n-2$

由Taylor级数知 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=-(3n+2)$

$\Rightarrow f^{(n)}(0)=-n!(3n+2)$.

1. 广义积分收敛性判断.

Rmk. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 当 $p<1$ 收敛

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 当 $p>1$ 收敛.

① $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$.

奇点: $0, +\infty$.

0处 $\ln(1+x)/x^p \sim x^{1-p}$. $1-p>-1$ 时收敛. 即 $\underline{\underline{p<2}}$

$+\infty$ 处. 当 $p>1$. 收敛.

$p \le 1$. 有 $\ln(1+x)/x^p \le \frac{1}{x}$ 发散.

综上: $p \in (1,2)$ 收敛; 其余发散

② $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx$. $(p, q>0)$.

奇点: $0, +\infty$.

$\frac{dx}{x^p+x^q}$

0处 $\frac{1}{x^p+x^q} \sim \frac{1}{x}$

0处 $\sim x^p$. 要求 $p>-1$

$+\infty$ 处 $\sim x^{p-q}$. 要求 $p-q<-1$

$\Rightarrow$ 当 $p>-1$ 且 $q>p+1$ 时, 收敛;

其余发散.

③ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$

0处. $\sim \frac{1}{x^p}$. $p<1$.

$\pi/2$ 处 $\sim \frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^q}$. $q<1$.

$\Rightarrow$ $p, q<1$ 时收敛;

其余发散.

④ $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$.

0处. $\frac{\ln x}{1-x} \sim \ln x$. 而 $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln x dx = x(\ln x - 1)\Big|_0^{\frac{1}{2}}$

$= -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$ 收敛.

1处. $\frac{\ln x}{1-x} = \ln(1+(x-1))/1-x \sim (x-1)/1-x = -1$.

故积分收敛!

⑤ $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta x}\,dx$. $(\alpha,\beta>0)$.

奇点仅 $+\infty$. 由于 $\dfrac{x^\alpha}{e^{\frac{1}{2}\beta x}}\to 0$ $(x\to+\infty)$

故 $\exists M>0$ s.t. $\forall x>M$. $x^\alpha e^{-\beta x}< e^{-\frac{1}{2}\beta x}$.

而 $\int_M^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta x}\,dx$ 收敛. 故 $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta x}\,dx$ 收敛.

⑥ (Laplace 变换)

$f(x)\in C[0,+\infty)$. $L(s)\triangleq\int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)\,dx$. 若 $L(s_0)$ 收敛.

则 $\forall s>s_0$. $L(s)$ 收敛.

证明: $L(s)=\int_0^{+\infty} e^{-s_0x}f(x)\cdot e^{-(s-s_0)x}\,dx$.

$\int_0^{+\infty} e^{-s_0x}f(x)\,dx$ 收敛, $e^{-(s-s_0)x}$ 单调有界

由Abel 判别法知 $L(s)$ 也收敛. 口.

⑦ $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$. Cauchy二值判.

当 $\alpha\le 0$. 显然发散. 因为 $\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\right|\to+\infty$ $(k\to+\infty)$

当 $\alpha>0$. $\left|\int_1^M \sin x\,dx\right|\le M$. $\dfrac{1}{x^\alpha}\downarrow 0$. 由 Dirichlet 判别法.

积分收敛

结论. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\alpha>0$ ✡

⑧ $\int_0^1\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$.

0处 $\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\sim x^{1-\alpha}$. 故收敛 $\Leftrightarrow$ $1-\alpha\overset{\ge}{\ne}-1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha<2$.

综上: $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\alpha\in(0,2)$

特别地 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$ 收敛.

⑨ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ 绝对收敛性？

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx}_{\text{要求 } \alpha<2.} + \int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$$

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha} = \underbrace{\frac{1}{2x^\alpha}}_{\text{要求 } \alpha>1.} - \underbrace{\frac{\cos 2x}{2x^\alpha}}_{\text{Dirichlet收敛}}$$

综上：$\alpha \in (0,1]$ 条件收敛

$\alpha \in (1,2)$ 绝对收敛.

⑩ $\int_1^{+\infty} \sin x^p\,dx$. $(p>0)$.

换元. $y = x^p$. $x = y^{\frac{1}{p}}$. $dx = \frac{1}{p} y^{\frac{1-p}{p}}\,dy$.

$$\int_1^{+\infty} \sin x^p\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1}\cdot \sin y\,dy.$$

(i) 当 $\frac{1}{p}-1<0$. 即 $p>1$ 时

$y^{\frac{1}{p}-1} \downarrow 0$. $\left|\int_1^M \sin y\,dy\right| \leq 2$ 由 Dirichlet 判别法 积分收敛.

(ii) 当 $\frac{1}{p}-1 \geq 0$. 即 $0<p\leq 1$. 时.

$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} y^{\frac{1}{p}-1}\sin y\,dy\right| \to +\infty$ $(k\to+\infty)$ 发散.

综上：$\int_1^{+\infty} \sin x^p\,dx$ $(p>0)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $p\in(1,+\infty)$

⑪ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\,dx$. $(\alpha>0)$.

$\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x} - \frac{\sin x}{x^\alpha} = \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}$.

$\to \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ 收敛. $\forall \alpha \in (0,+\infty)$

$+\infty$ 处 $\sim \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{2x^{2\alpha}} - \frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}}$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}}\,dx$ 收敛 ✓. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^{2\alpha}}$ 收敛 $\Leftrightarrow 2\alpha>1$

$\Leftrightarrow \alpha > 1/2$.

· 因此, $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$ 时, 积分发散; $\alpha \in (\frac{1}{2},+\infty)$ 时, 积分收敛.

⑫ $\int_1^{+\infty} x(1-\cos\frac{1}{x})^\alpha dx$.

$= \int_1^{+\infty} x\cdot(2\sin\frac{1}{2x})^\alpha dx$. $+\infty$ 处 $\sim x\cdot(\frac{1}{x})^\alpha = x^{1-\alpha}$

收敛 $\Leftrightarrow 1-\alpha<-1 \Leftrightarrow \alpha>2$

⑬ $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx$.

注意到 $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le 1$. 故 $\left|\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| = \sin\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \left|\frac{\sin x}{x}\right|$.

不可 $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$

$\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

$\to \int_1^{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ 收敛 ✓

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛.

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx$ 收敛.

并且由于 $\int_1^{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ 绝对收敛, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛

知道 $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx$ 条件收敛.

⑭ (2025.5).

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(\sin^2 x)^\alpha} \quad . \quad (\alpha \in (0, \tfrac{1}{2}))$$

奇点：$k\pi$. $k \in \mathbb{N}$. 和 $+\infty$.

这样分解：原式：$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{(1+x^2)(\sin^2 x)^\alpha}$.

$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{\sin^{2\alpha} x}$ 收敛. 由为 $2\alpha < 1$.

且与 n 无关，记该积分为 M.

显然 $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{(1+x^2)\sin^{2\alpha} x} \geq \frac{M}{1+(n+1)^2\pi^2}$

又 $\sum_{n=0}^{+\infty} M \cdot \frac{1}{1+(n+1)^2\pi^2}$ 收敛. 故积分收敛.

⑮ $f \in C(0, +\infty)$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = C$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = D$. $0 < a < b$

求证：$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (C-D) \cdot \ln \frac{b}{a}$.

证明：$\forall M > \varepsilon > 0$. $\int_\varepsilon^M \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$

$$= \int_\varepsilon^M \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\varepsilon^M \frac{f(bx)}{x} dx$$

$$= \int_{a\varepsilon}^{aM} \frac{f(t)}{t} dt \quad (t = ax) \quad - \int_{b\varepsilon}^{bM} \frac{f(t)}{t} dt \quad (t = bx)$$

$$= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{aM}^{bM} \frac{f(t)}{t} dt.$$

$$= f(\xi_1) \ln \frac{b}{a} - f(\xi_2) \ln \frac{b}{a} \quad (\xi_1 \in (a\varepsilon, b\varepsilon), \xi_2 \in (aM, bM))$$

$\longrightarrow (C-D) \cdot \ln \frac{b}{a}$ $(\varepsilon \to 0^+, M \to +\infty)$. □.

⑯. 在级数中. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

那么, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛, 是否推出 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

(无瑕点)

不是. 如 $f(x) = \begin{cases} n, & x\in[n, n+\frac{1}{2n^3}] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$. $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} < +\infty$.

若 $f\in C[0,+\infty)$ 呢?

也不是. 如. $f(x)$ 满足在 $[n, n+\frac{1}{n^3}]$ 上有

$f(n) = f(n+\frac{1}{n^3}) = 0$.

$f(n+\frac{1}{2n^3}) = n$. 中间线性连接.

则 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} < +\infty$.

且 $f\in C[0,+\infty)$.

若 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续呢? 即 $\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta>0$ s.t.

$\forall x,y\in[0,+\infty)$. $|x-y|<\delta$. 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

是. 证明: 若不是 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

则 $\exists \varepsilon_0>0$ s.t. $\forall M>0$ 都 $\exists x>M$ s.t. $|f(x)|>\varepsilon_0$

那么, 可以找一列 $\{x_n\}$. s.t. $x_{n+1}-x_n>1$. $x_n\to+\infty$.

s.t. $|f(x_n)|>\varepsilon_0$. 和 $\exists \delta>0$. s.t. $\forall |x-y|<\delta$.

有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon_0/2$ 不妨设 $\delta<\frac{1}{2}$. 则 $(x_n-\delta, x_n+\delta)$ 上, $|f(x)|>\varepsilon_0/2$

$\Rightarrow \left|\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)\,dx\right| \geq \varepsilon_0\delta$ 由 Cauchy 准则 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散.

矛盾! 故 $f(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$ □

2. 特殊广义积分计算技巧.

思考. 对无穷积分. "$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛" 与 "$\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛". 什么关系? 对瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f^2(x)dx$ 呢 ($\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$).

(i) ~~无~~ 无穷积分.

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 敛散性无关.

Eg. $f(x) = \frac{1}{x}$. 则 前者发散, 后者收敛.

Eg. $f(x) = \begin{cases} n, & x\in[n, n+\frac{1}{2n^3}] \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛.

$\int_1^{+\infty} f^2(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ 发散.

(ii) 瑕积分.

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le \int_a^b 1^2 dx \int_a^b f^2(x)dx = (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

(Cauchy 不等式)

故 $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

反之则不然.

Eg. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. 则 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ 发散.

例. $a>0$. $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛 证明 $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ 也收敛.

证明: $\left(\int_a^{+\infty} \left|\frac{f(x)}{x}\right|dx\right)^2 \le \int_a^{+\infty} f^2(x)dx \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$.

即 $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛. □.

① Euler 积分.

$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$. 瑕点 0. $\ln\sin x\sim\ln x$. 而 $\int_0^{\pi/2}\ln x\,dx$ 收敛

知瑕积分收敛

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln 2+\ln\sin\frac{x}{2}+\ln\cos\frac{x}{2}\,dx$$

其中, $\int_0^{\pi/2}\ln\cos\frac{x}{2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\ln\cos\frac{\pi-y}{2}\,dy$ $(y=\pi-x)$

$=\int_0^{\pi/2}\ln\sin\frac{y}{2}\,dy$

$=2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt$ $(t=\frac{y}{2})$.

其中, $\int_0^{\pi/2}\ln\sin\frac{x}{2}\,dx=2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt$ $(t=\frac{x}{2})$

$\int_0^{\pi/2}\ln\cos\frac{x}{2}\,dx=2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt$ $(t=\frac{x}{2})$

$=2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin t\,dt$. $(t\leftarrow\frac{\pi}{2}-t)$

$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I$.

$\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

② Froullani 积分

$f(x)\in C[0,+\infty)$. $f(+\infty)$ 存在. $a,b>0$.

则 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=(f(0)-f(+\infty))\cdot\ln\frac{b}{a}$. (见前习题)

③ 概率积分. $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

极坐标. $4I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$

$=\int_0^{+\infty}e^{-r^2}\cdot r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\cdot\int_0^{+\infty}re^{-r^2}dr=\pi$.

$\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

一般地, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=1$. (均值 a, 方差 σ^2 正态密度).

④ Dirichlet 积分. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

考虑 $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$

$$\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx = \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\tfrac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right)$$

$$= \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

那么, $\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos kx\,dx}_{=0}$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

记 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2} - x}{2x\sin\frac{x}{2}} \sim \frac{O(x^3)}{x^2} = O(x) \to 0 \quad (x\to 0)$.

因此, $f(x)$ 没有瑕点. 在 $[0,\pi]$ 上可积.

「Recall. Riemann-Lebesgue 引理 若 $f\in R[a,b]$.

则 $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cdot\sin\lambda x\,dx = 0$ 」.

则 $\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x} - \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\,dx \to 0 \quad (n\to+\infty)$.

故 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

对左侧换元. $t = \left(n+\frac{1}{2}\right)x$.

$$LHS = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt \overset{\text{广义}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.