2026.3.31 曲面积分.

1. 曲线和曲面的表示.

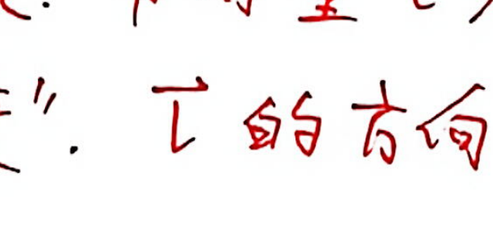
① 曲线.

曲线一般由单参数参数方程 Γ 表示.

Eg. 圆 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ 函数 $y=f(x)$. $\begin{cases} x=x \\ y=f(x) \end{cases}$

一般 $\mathbb{R}^3$ 中曲线 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

「曲线的方向」.



和高中解析几何类似，我们用方向向量表示曲线的方向，用法向量表示曲面方向.

在 $(x(t), y(t), z(t))$ 处曲线切向为

$$\vec{\tau} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

「曲线的长度」.

$$ds = |\vec{\tau}|\,dt = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$ 称为弧微元.

Rmk. 切向量 $\vec{\tau}$ 表示了 $(x(t), y(t), z(t))$ 处曲线的方向与"长度". $\vec{\tau}$ 的方向就是曲线的方向，$\vec{\tau}$ 的模长就是"长度".

「Γ型曲线积分的理解」.

- $\vec{F}=\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ 是3维向量函数.

Γ型曲线积分 $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} \triangleq \int \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,dt = \int P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

含义为询问 $\vec{F}$ 沿曲线方向的贡献为多少.

② 曲面.

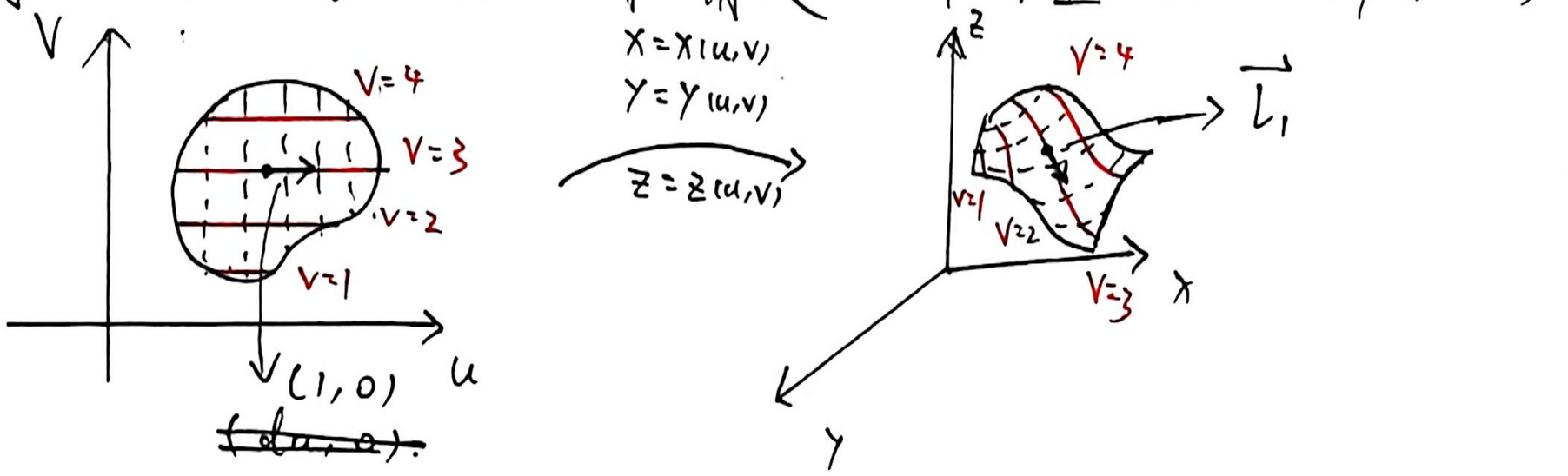
曲面一般由双参数参数方程表示.

Eg. 球面 $\begin{cases} x=\sin\varphi\cos\theta \\ y=\sin\varphi\sin\theta \\ z=\cos\varphi \end{cases}$ --- (i)　　一般 $z=f(x,y)$. $\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=f(x,y). \end{cases}$ ---(ii)

一般曲面 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v). \end{cases}$ --- (△)

「曲面的方向」. 用法向量表示曲面的方向. ✡

考虑方程 (△). 固定 v 变量后, x,y,z 看作一条关于 u 的曲线, 因此可确定一个切向量 $\vec{l}_1=(x_u,y_u,z_u)$



同理可固定 u, 给出另一个切向量 $\vec{l}_2=(x_v,y_v,z_v)$

由于这2个切向量均是曲面上曲线的切向量, 故当然, 是曲面的切向量. 即总结为以下.

对给定 (u,v). $\vec{l}_1=(x_u,y_u,z_u)$, $\vec{l}_2=(x_v,y_v,z_v)$ 是曲面在 $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 处的2个切向量.

Eg. 对 (i). $\vec{l}_1=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,-\sin\varphi)$

$\vec{l}_2=(-\sin\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\theta,0)$.

如代入 $(\varphi,\theta)=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$.

即 $\vec{l}_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\vec{l}_2=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

是球面在 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处2个切向量.

Eg. 对(i)，即 $\vec{l}_1 = (x_x, y_x, z_x) = (1, 0, f_x)$

$\vec{l}_2 = (x_y, y_y, z_y) = (0, 1, f_y)$

为 $(x, y, f(x,y))$ 处2个切向量.

现在求曲面法向 $\vec{n}$，只需对 $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ 做外积.

$$\vec{n} = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right).$$

转置不改变行列式.

$$= \left(\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right)$$

Rmk. 不加绝对值 y,z; z,x; x,y 顺序不能调换!!!

因为换序会多负号!

即曲面法向量 $\vec{n} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$.

Eg. 对(ii). $\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} \right)$

$$= \left(\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\varphi \right).$$

如代入 $(\varphi, \theta) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. 即 $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2})$ 是 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 处法向.

易验证是对的.

Eg. 对(iii) $\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} y_x & y_y \\ z_x & z_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_x & z_y \\ x_x & x_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_x & x_y \\ y_x & y_y \end{vmatrix} \right)$

$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

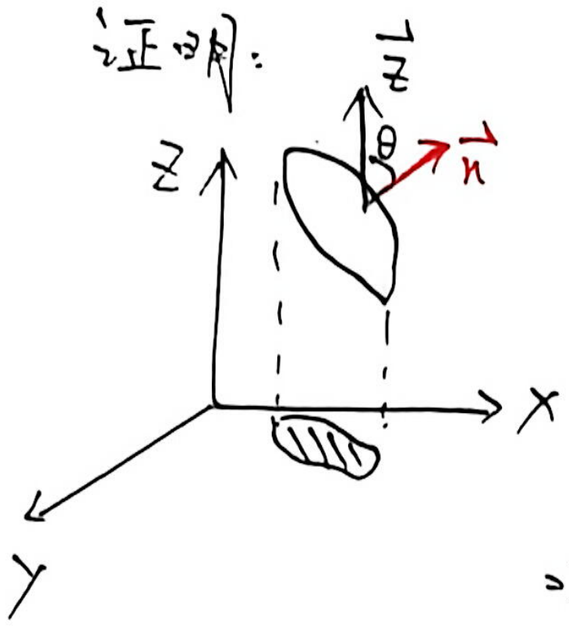
$$= (-f_x, -f_y, 1).$$

是 $z = f(x,y)$ 在 $(x, y, f(x,y))$ 处法向量.

「曲面的大小」.

与曲线类似. $\vec{n}$ 的方向表示曲面的方向, $|\vec{n}|$ 则表示曲面面积微元的大小. $\boxed{dS = |\vec{n}|\,du\,dv}$ ☆

证明: 将曲面投影至 xy 平面上.



$$\text{知 } dS = \frac{dx\,dy}{\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{z}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{z}|} = \frac{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{|\vec{n}|} \quad \vec{z} = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow dS = \frac{|\vec{n}|}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\,dx\,dy = |\vec{n}|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy$$

$$= |\vec{n}|\,du\,dv \quad \square.$$

「区分上侧、下侧」.

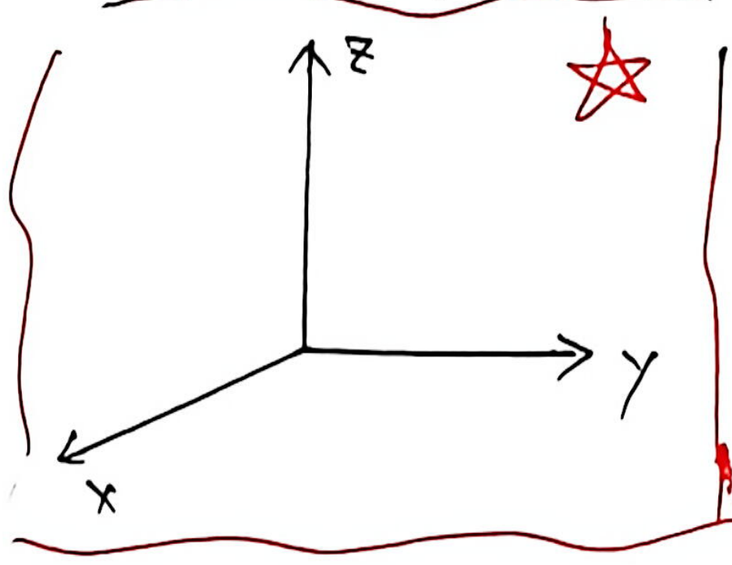
计算二型曲面积分需区分曲面的"侧".

上侧: $\vec{n}$ 指向 z 轴正向. 即 $\vec{n}$ 第三分量 >0

前侧: $\vec{n}$ 指向 x 轴正向. 即 $\vec{n}$ 第一分量 >0

右侧: $\vec{n}$ 指向 y 轴正向. 即 $\vec{n}$ 第二分量 >0.

这里的前、右、上是相对于标准右手系而言



注意: x 指向前, y 指向右.

这样 $\vec{x}\times\vec{y}$ 才是 $\vec{z}$ 方向. ☆

我在之前讲义及课上常用的是左手系

如本页上方的图. 大家不要学习, 注意区分!

Eg. $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上半部下侧

易知 (x,y,z) 是一个法向量, 但 $z>0$ 时, 第三分量为正

因此指向上侧. $(-x,-y,-z)$ 才指向下侧.

Eg. 习题 8.5.9. 求 $\iint_S -2\,dy\,dz + 2y\,dz\,dx + e^z \sin(x+2y)\,dx\,dy$

S: $y=e^x$, $1\le y\le 2$, $0\le z\le 2$ 前侧.

$\Leftrightarrow x\in[0,\ln 2]$

Step1. 算法向量 $\vec{n}$.

$$S:\begin{cases} x = x \\ y = e^x \\ z = z \end{cases}$$ 与 x,z 为参数.

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,z)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(x,z)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,z)}\right)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e^x & 0 \end{vmatrix}\right) = (e^x, -1, 0).$$

Step2. 调整 $\vec{n}$ 方向.

$\vec{n}$ 第一分量是 $e^x > 0$. 因此是指向前侧!

Step3. 换成关于 u,v 的二重积分计算

$$I = \int_0^{\ln 2}\int_0^{\ln 2} (-2e^x + 2y\cdot(-1) + e^z\sin(x+2y)\cdot 0)\,dx\,dz \qquad y=e^x$$

$$= -4\int_0^{2}\int_0^{\ln 2} e^x\,dx\,dz = -8.$$

另一做法. 以 y,z 为参数. $x=\ln y$.

$$S:\begin{cases} x = \ln y \\ y = y \\ z = z. \end{cases}$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(y,z)}\right)$$

$$= \left(1, -\frac{1}{y}, 0\right), \quad 1>0$$ 后续一样

另一做法. 以 z,x 为参数. 这与以 x,z 为参数会差符号.

$$S:\begin{cases} x = x \\ y = e^x \\ z = z \end{cases}$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(z,x)}\right)$$

$$= (-e^x, 1, 0).$$

此时需再次 $-\vec{n}$, 使其指向前侧. 否则答案差负号.

「区分内、外侧」.

① (2025.5).

$S^+: x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧. 求 $\oiint_{S^+}(x^2+x)dydz+(y^2+y)dzdx+(z^2+z)dxdy$

法1. 由对称性，只算 $\oiint_{S^+}(x^2+x)dydz$.

Step1. 算 $\vec{n}$

$$S:\begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta\\ y=R\sin\varphi\sin\theta\\ z=R\cos\varphi.\end{cases}$$

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)$$

$$=\left(R^2\sin^2\varphi\cos\theta,\ R^2\sin^2\varphi\sin\theta,\ R^2\cos\varphi\sin\varphi\right).$$

Step2. 判断 $\vec{n}$ 指向并调整

特殊取 $(\varphi,\theta)=\frac{\pi}{2}$ 试一下. $(x,y,z)=\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$.

$\vec{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}R^2,\frac{\sqrt{2}}{4}R^2,\frac{1}{2}R^2\right)$ 的确指向外侧.

Rmk. 如果你习惯算 $\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}$... 而非 $\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}$...

你求出的 $\vec{n}$ 就会指向内侧，需要换方向!!!

Step3. 化成二重积分计算.

$$\oiint_{S^+}(x^2+x)dydz=\iint_{\substack{0\le\varphi\le\pi\\0\le\theta\le2\pi}}\left(R^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+R\sin\varphi\cos\theta\right)\cdot R^2\sin^2\varphi\cos\theta\cdot d\varphi d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3 \quad\Rightarrow\quad \text{原式}=4\pi R^3$$

Rmk. 一般 $\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

$$=\pm\iint_{D_{uv}}\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv$$

$$=\pm\iint_{D_{uv}}(P,Q,R)\cdot\vec{n}\,dudv$$

"+"还是"−"就是 Step2. 调 $\vec{n}$ 方向那一步.

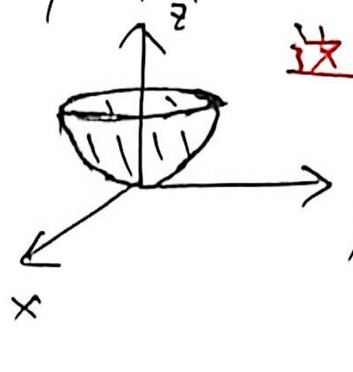
法2 Gauss公式

$$\text{原式} = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2} 2(x+y+z)+3\ dxdydz = 3\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2} dxdydz = 4\pi R^3.$$

② (2022.5).

$$I = \oint_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy.$$

S 是 $z = x^2+y^2$, $(0\le z\le 4)$ 下侧



这是椭圆抛物面下面那个碗没有盖子.

法1. Step1. 算 $\vec{n}$

$$S:\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \qquad \vec{n} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}\right)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-2x, -2y, 1).$$

Step2. 调方向

$\vec{n}$ 第三分量 $1>0$. 因此指向上. 我们让它反向.

$\vec{n} = (2x, 2y, -1)$ 指向下侧!

Step3. 换成二重积分计算

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 4} \underbrace{(x\cdot 2x + y\cdot 2y - (x^2+y^2))}_{(-1)\cdot z} dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2)\,dxdy$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} r^2\cdot r\,d\theta\,dr = 2\pi\int_0^2 r^3\,dr = 8\pi.$$

法2 Gauss公式. 添加曲面 $\Sigma: x^2+y^2\le 4,\ z=4$. 即"上盖". 上侧

则 $S\cup\Sigma$ 封闭. $\Rightarrow I + \oint_\Sigma x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$

内部记为 Ω $= 3\iiint_\Omega dxdydz = 3V(\Omega)$.

$$V(\Omega) = \int_0^4 \pi z\,dz = 8\pi$$

$$\oint_\Sigma x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 4} z\,dxdy = 4\underbrace{S(\Sigma)}_{4\pi} = 16\pi$$

$$\Rightarrow I = 24\pi - 16\pi = 8\pi.$$

错误示范

像二重积分换元一样，把 $dydz$，$dzdx$ 直接乘 Jacobian 绝对值变成 $dxdy$

这一步遗漏方向，造成错误。

$$\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}\right| = 2|x|.$$

$$\left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}\right| = 2|y|$$

$$\Rightarrow I = \iint_{x^2+y^2\le 4} (2x|x| + 2y|y| + (x^2+y^2))\,dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2)\,dxdy = 8\pi.$$

虽然答案对了，但过程是完全错误的。注意正型曲面积分与二重积分中 $dxdy$ 含义的区别。

③ $I = \iint_\Sigma dydz + dzdx + dxdy$. Σ：$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 上半部内侧。

法1. $\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)} = \frac{x}{z}$，$\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)} = \frac{y}{z}$.

$\vec{n} = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, +1)$ 指向外侧，因此反向。

$\vec{n} = (-\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, -1)$ 向内侧。

$$I = -\iint_{x^2+y^2\le 1} (\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1)\,dxdy \xlongequal{\text{对称性}} -\iint_{x^2+y^2} dxdy = -\pi$$

法2. 球坐标

$$\begin{cases} x = \sin\varphi\cos\theta & \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y = \sin\varphi\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi]. \\ z = \cos\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)$$

$$= (\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\varphi).$$

取 $(\varphi,\theta) = (\frac{\pi}{4}, 0)$.

$(x,y,z) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. $\vec{n} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ 向外.

因此计算时取 $-\vec{n}$.

$$I = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2\varphi(\sin\theta+\cos\theta)}_{\text{对称性}=0} + \sin\varphi\cos\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi \, d\varphi = -\pi.$$

法3. Gauss公式.

补上底面 $\Sigma: x^2+y^2\le 1, z=0$ 上侧. $S\cup\Sigma$ 内部记为 Ω.

$$-I - \oint\!\!\!\!\!\!\bigcirc\left(\underbrace{\iint_\Sigma dx\,dy + dy\,dz + dz\,dx}_{=S(\Sigma)=\pi}\right) = \iiint_\Omega 0 \, dx\,dy\,dz = 0.$$

$$\Rightarrow I = -\pi.$$

「$|\vec{n}|$ 的另一算法」.

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = (x_u, y_u, z_u) \times (x_v, y_v, z_v).$$

曲外积几何含义. 乘以夹角正弦!

$$|\vec{n}| = \sqrt{|(x_u,y_u,z_u)|^2 \cdot |(x_v,y_v,z_v)|^2 - \left((x_u,y_u,z_u)\cdot(x_v,y_v,z_v)\right)^2}$$

$$= \sqrt{EG-F^2}$$

$$\begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{cases}$$

常用在I型曲面积分 dS 计算中.

Eg. $\iint_S yz\,dS$. $S: x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v$

$$0 \le u \le a, \quad 0 \le v \le 2\pi.$$

$$\begin{cases} x_u = \cos v, & y_u = \sin v, & z_u = 0 \\ x_v = -u\sin v, & y_v = u\cos v, & z_v = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = 1,\ G = u^2+1,\ F = 0$$

$$\Rightarrow dS = \sqrt{u^2+1}\,du\,dv.$$

原式 $= \int_0^a \int_0^{2\pi} uv\sin v\sqrt{1+u^2}\,dv\,du$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du \cdot \int_0^{2\pi} v\sin v\,dv = \frac{1}{3}\left((1+a^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)\times(-2\pi)$$

$$= -\frac{2}{3}\pi\left((1+a^2)^{3/2}-1\right).$$