2026.4.21. ODE III.

1. 特征方程方法.

对于常系数高阶线性ODE.

如 $y''-3y'+2y=0$, $y^{(4)}-3y'''+2y''-y'-y=0$ 等.

使用特征方程求解.

Eg. 以上2个方程分别对应特征方程

$x^2-3x+2=0$. $x^4-3x^3+2x^2-x-1=0$.

对于特征方程的一个 m 重特征根 α, 对应原方程有形如 $P_m(x)e^{\alpha x}$ 的基解. 其中 $P_m(x)$ 是任意 m 次多项式.

虚数 α 导致三角函数. $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

变式1. 非齐次. 如 $y''-3y'+2y=f(x)$.

Step1. 猜出一个特解. y^*

Step2. 解对应齐次方程通解 $C_1e^x+C_2e^{2x}$

非齐次方程通解为 $f(x)+C_1e^x+C_2e^{2x}$.

① $f(x)$ 是多项式、指数、三角函数时, 直接套猜

(i) $f(x)=Ae^{\alpha x}$. 猜 $y=P_m(x)e^{\alpha x}$. (α 是 m 重特征根)

$m=0$ 即不是特征根.

(ii) $f(x)=A\sin\beta x+B\cos\beta x$. 猜 $y=P_m(x)\sin\beta x+Q_m(x)\cos\beta x$

($i\beta$ 是 m 重特征根).

(iii) $f(x)=P_m(x)$. m 次多项式. 猜 $y=Q_n(x)$. 取 n 使最高次项对齐次数.

Eg. 对以下方程确定特解形式. (习题 7.5.3).

(1) $y''-5y'+5y=6$.

$y=C \rightsquigarrow y=6$.

(2) $y''+3y'=6e^{2x}$.

$y=Ae^{2x} \rightsquigarrow y=\frac{3}{5}e^{2x}$

(3) $y''-9y'+20y=x+1$

$y=Ax+B \rightsquigarrow y=\frac{1}{20}x+\frac{29}{400}$.

(4) $y''+y=4\sin x$. 注意 i 是一重特征根.

$y=(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x$

(5) $y''-3y'+2y=x\cos x$. i 不是特征根, 但右侧多了 x.

$y=(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x$.

(6) $y''-9y=\underline{e^{3x}\cos x}$. → 这对应 $e^{(3+i)x}$, $e^{(3-i)x}$.

3±i 不是特征根.

$y=Ae^{(3+i)x}+Be^{(3-i)x}$ 或写成 $y=e^{3x}(A\sin x+B\cos x)$.

(7) $y''-y=\underline{2e^x-x^2}$ 根据线性性质, 这可分成算2个特解

$y''-y=2e^x \rightsquigarrow y=(Ax+B)e^x$.

$y''-y=-x^2 \rightsquigarrow y=Ax+Bx+C$.

(8) $y''+y'=\sin 4x-2\sin 2x$

$y''+y'=\sin 4x \rightsquigarrow y=\cancel{Ax+B}\ A\sin 4x+B\cos 4x$

$y''+y'=-2\sin 2x \rightsquigarrow y=A\sin 2x+B\cos 2x$.

(习题 9.5.4)

(1) $y''+y=x^2+x$.

$y=Ax^2+Bx+C$. $\rightsquigarrow$ $y=x^2+x-2$.

(2) $y''+y'=x-2$. 注意左侧最高次是 y'.

因此仍待定二次函数!

$y=Ax^2+Bx+C$.

或 $y'=Ax+B \rightsquigarrow y'=x-3. \rightsquigarrow y=\frac{x^2}{2}-3x+C$.

(3) $y''+y=\underbrace{e^{3x}}_{\downarrow}(\underbrace{x-2}_{\text{多一次}})$

3不是特征根 $\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\rangle 0+1=1$ $y=(Ax+B)e^{3x}$.

(4). $y''-y=\underbrace{e^x}_{\text{1是一重根}}(\underbrace{x^2-1}_{\rightarrow 2次})$ $2+1=3$ $y=xe^x(Ax^2+Bx+C)$

xe^x

(5). $y'''+3y''+3y'+y=\underbrace{e^{-x}}_{\text{-1三重根}}(\underbrace{x-5}_{\text{一次}})$ $y=x^3e^{-x}(Ax+B)$

(6) $y''-2y'+2y=e^x+x\cos x$.

$y''-2y'+2y=e^x \rightsquigarrow y=Ae^x \rightsquigarrow y=e^x$.

$y''-2y'+2y=x\cos x \rightsquigarrow y=(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x$.

Eg. (2024.6). $y''-2y'+y=e^x$.

Step1. 猜 $y=Ax^2e^x$. (1是二重根)

$y'=Ae^x(x^2+2x)$. $y''=Ae^x(x^2+4x+2)$

$y''-2y'+y=2Ae^x$ $A=\frac{1}{2}$.

Step2. 解齐次方程通解. $y''-2y'+y=0$.

$y=C_1e^x+C_2xe^x$.

$\Rightarrow y=(\frac{1}{2}x^2+Ax+B)e^x$.

Eg. (2023.3) $y''+y'-2y = x+e^x+\sin x$. $y(0)=-\frac{7}{20}$, $y'(0)=\frac{38}{15}$.

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$. 特征根 $-2, 1$

Step1. 特解

$y''+y'-2y=x$. $\Rightarrow$ $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

$y''+y'-2y=e^x$. $\Rightarrow$ $y=Axe^x$. $y'=Ae^x(x+1)$, $y''=Ae^x(x+2)$

$y''+y'-2y=Ae^x(3)=3Ae^x$. $A=\frac{1}{3}$.

$y=\frac{1}{3}xe^x$.

$y''+y'-2y=\sin x$. $\Rightarrow$ $y=A\sin x+B\cos x$

$y'=A\cos x-B\sin x$

$y''=-A\sin x-B\cos x$

$y''+y'-2y=(-3A-B)\sin x+(A-3B)\cos x$

$\begin{cases}3A+B=-1\\ A=3B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{3}{10}\\ B=-\frac{1}{10}.\end{cases}$ $y=-\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10}\cos x$

Step2. 齐次通解. $y=Ae^x+Be^{-2x}$.

综合. $y=\frac{1}{3}xe^x-\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10}\cos x+Ae^x+Be^{-2x}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

$y'=\frac{1}{3}e^x(x+1)-\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x+Ae^x-2Be^{-2x}-\frac{1}{2}$.

$\begin{cases}y(0)=-\frac{1}{10}+A+B-\frac{1}{4}=-\frac{7}{20}\\ y'(0)=\frac{1}{3}-\frac{3}{10}+A-2B-\frac{1}{2}=\frac{38}{15}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\ A-2B=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ B=-1.\end{cases}$

$y=\frac{1}{3}xe^x-\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10}\cos x+e^x-e^{-2x}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

② $f(x)$ 较复杂，使用常数变易法.

一般题目限于二阶方程.

Step1. 先解出齐次通解 $y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$.

Step2 猜 $y=A(x)e^{\alpha x}+B(x)e^{\beta x}$.

$$y'=\alpha A(x)e^{\alpha x}+\beta B(x)e^{\beta x}+\underline{A'(x)e^{\alpha x}+B'(x)e^{\beta x}}$$

令之为0. 因为有A,B之个自由度. 这里可以用掉一个. ☆

$$y''=\alpha^2A(x)e^{\alpha x}+\beta^2B(x)e^{\beta x}+\alpha A'(x)e^{\alpha x}+\beta B'(x)e^{\beta x}.$$

求解 $\begin{cases}?y''+?y'+?y=f(x)\\ A'(x)e^{\alpha x}+B'(x)e^{\beta x}=0\end{cases}$ 即可

Eg. (2025.7). $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{2+e^x}$. (这和作业题 9.6.1. 一样).

Eg. $y''+4y=2\tan X$.

Step1. 齐次通解 $y=A\sin 2X+B\cos 2X$.

Step2. 常数变易 $y=A(x)\sin 2X+B(x)\cos 2X$.

$$y'=2A(x)\cos 2X-2B(x)\sin 2X+\underline{(A'(x)\sin 2X+B'(x)\cos 2X)}$$

令之为0

$$y''=-4B(x)\cos 2X-4A(x)\sin 2X+2A'(x)\cos 2X-2B'(x)\sin 2X$$

$$y''+4y=2A'(x)\cos 2X-2B'(x)\sin 2X=2\tan X$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A'(x)\sin 2X+B'(x)\cos 2X=0\\ A'(x)\cos 2X-B'(x)\sin 2X=\tan X.\end{cases}$$

$\Rightarrow A'(x) = -B'(x)\cot 2X.$

$\Rightarrow -B'(x) = \tan X \cdot \sin 2X = 2\sin^2 X$

$\Rightarrow B(x) = \int -2\sin^2 X\,dx = \sin X\cos X - X.$

$A'(x) = 2\sin^2 X \cdot \dfrac{\cos 2X}{\sin 2X} = \sin X\cos 2X / \cos X$

$A(x) = \ln|\cos x| - \cos^2 X.$

$\Rightarrow y = \sin 2X\cdot\ln|\cos X| \underbrace{-\sin 2X\cos^2 X + \sin X\cos X\cos 2X}_{=-\frac{1}{2}\sin 2X} - X\cos 2X$

为特解

$\Rightarrow y = \sin 2X\cdot\ln|\cos X| - X\cos 2X + A\cos 2X + B\sin 2X.$

变式2. Euler 方程. 将一些 $X^n y^{(n)}$ 加起来称为 Euler eqn.

换元 $X = e^t$, $t = \ln X$. 会变成关于 t 的线性方程.

Eg. (2023.2). $X^2y'' - 3xy' + 4y = 0\ (x>0)$. $y(1)=1$, $y'(1)=1$.

换元 $X = e^t$. $t = \ln X$. $\dfrac{dx}{dt} = e^t$. $\dfrac{dt}{dx} = e^{-t} = \dfrac{1}{X}$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{X}\dfrac{dy}{dt}$

$y'' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{X}\dfrac{dy}{dt}\right) = -\dfrac{1}{X^2}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{dt}{dx}$

$= \dfrac{1}{X^2}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right).$

$\Rightarrow \underbrace{\dfrac{d^2y}{dt^2}}_{1} \underbrace{- \dfrac{dy}{dt} - 3\dfrac{dy}{dt}}_{-4} \underbrace{+ 4y}_{4} = 0.$

$X^2 - 4X + 4 = 0$ 特征根是 2 (二重).

$\Rightarrow y = (At+B)e^{2t} = X^2(A\ln X + B).$

$y' = 2AX\ln X + 2BX + AX.$

$\begin{cases} y(1) = B = 1 \\ y'(1) = A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0-1 \\ B = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow y = X^2(1 - \ln X).$

2. 其它 ODE 相关往年题目.

① 写 Picard 序列.

(2024.5). $y' = x + y^2$. $y(0) = 0$. 写出 Picard 序列 y_1, y_2.

积分: $y(x) = \int_0^x s + y^2(s)\, ds$.

$$y_1(x) = \int_0^x (s + 0)\, ds = \frac{1}{2}x^2.$$

$$y_2(x) = \int_0^x (s + \frac{1}{4}s^4)\, ds = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5.$$

② (2025.6). $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$

这是齐次方程. 令 $y = ux$.

$$y' = u'x + u.$$

$$\Rightarrow \quad x^2u' + xu - ux = x(1+u)\cdot\ln(1+u).$$

$$\Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}(1+u)\ln(1+u).$$

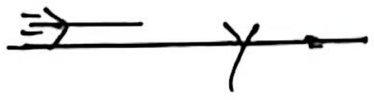
$$\Rightarrow \quad \frac{du}{(1+u)\ln(1+u)} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\ln(1+u)| = C + \ln|x|.$$

$$\Rightarrow \quad Ce^x = \ln\frac{x+y}{x}. \quad (C \in \mathbb{R}).$$

③ (2021.6.) $y' = xy + 3x + 2y + 6$

$$y' = (x+2)(y+3) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y+3} = (x+2)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y+3| = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C. \quad (C \in \mathbb{R}).$$



3. ODE 解法回顾.

① 分离变量

$f(x)\,dx = g(y)\,dy \Rightarrow F(x) - G(y) = C$.

(i) $y' = f(x,y)$. 关于 x, y 齐次. 换元 $y = ux$.

(ii) $y' = f(ax+by+c)$. 换元 $u = ax+by+c$

(iii) $y' = \dfrac{ax+by+c}{dx+ey+f}$. 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. 平移 $x \leftarrow x - x_0$, $y \leftarrow y - y_0$.

变成 $(y-y_0)' = y' = \dfrac{a(x-x_0)+b(y-y_0)}{d(x-x_0)+e(y-y_0)}$

关于 $x-x_0$, $y-y_0$ 齐次.

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$. 则本质是 (ii).

② 积分因子.

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$.

(i) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 直接积分.

(ii) 否则找 $u(x,y)$. s.t. $\dfrac{\partial}{\partial y}(Pu) = \dfrac{\partial}{\partial x}(Qu)$.

常见: $u(x)$, $u(y)$, $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\dfrac{1}{xy}$.

③ 一阶线性 ODE.

$y' + P(x)y = q(x)$

(i) 齐次 $q(x) = 0$. $y = Ce^{-\int_a^x P(t)\,dt}$

(ii) 非齐次. 公式法. $y = \left(\int_a^x q(t) e^{\int_a^t P(s)\,ds}\,dt + C\right) e^{-\int_a^x P(t)\,dt}$

常数变易法: $y = c(x) e^{-\int_a^x P(t)\,dt}$, 解 $c(x)$.

(iii) Bernoulli 方程 $y' + P(x)y = q(x)y^\alpha$. $(\alpha \neq 0, 1)$

换元 $z = y^{1-\alpha}$. $\Rightarrow z' + (1-\alpha)P(x)z = q(x)\cdot(1-\alpha)$.

④ 高阶常系数线性ODE.

(i) 特征方程

(ii) 非齐次 $\begin{cases} \text{猜特解} & (P_m(x),\ e^{\alpha x},\ \sin\beta x). \\ \text{常数变易法}. \end{cases}$

(iii) Euler 方程. 换元 $x=e^t$, $t=\ln x$.

(补) Euler 方程的特征方程.

Eg. $x^2y''-3xy'+4y=0$.

代入测试解 x^α.

$$\Rightarrow \underbrace{(\alpha(\alpha-1)-3\alpha+4)}\ x^\alpha=0$$

$$\Rightarrow \alpha^2-4\alpha+4=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=2 \text{ 是二重根}$$

故 $y=x^2\cdot P_1(\ln x)$. → 一次多项式.

一般地，将 x^α 代入 Euler 方程.

若有 m 重实特征根 α，则对应基解 $P_{m-1}(\ln x)\,x^\alpha$.

若有 m 重复特征根 $\alpha\pm\beta i$.

由于 $x^{\alpha\pm\beta i}=x^\alpha\cdot x^{\pm\beta i}=x^\alpha\cdot e^{\pm i\cdot\beta\ln x}$

$$=x^\alpha\cdot(\cos(\beta\ln x)\pm i\cdot\sin(\beta\ln x)).$$

因此对应基解 $P_{m-1}(\ln x)\,x^\alpha\cos(\beta\ln x)+Q_{m-1}(\ln x)\cdot x^\alpha\cdot\sin(\beta\ln x)$.